Examen du 17 janvier 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Exercice 1 (Semi-cônes et polarité, 9 points)**.** Pour tout semi-cône non vide $\mathcal{K}$, on appelle *semi-cône polaire* de $\mathcal{K}$ et on note $\mathcal{K}^\circ$ l'ensemble suivant:

$$\mathcal{K}^\circ := \{x \in H \text{ tel que } \langle x, y\rangle \leqslant 0, \forall y \in \mathcal{K}\}.$$

1. $0 \in \mathcal{K}$ donc $\mathcal{K}$ est non vide. Soit $x \in \mathcal{K}^\circ$, $t \geqslant 0$ et $y \in \mathcal{K}$. Alors $\langle tx, y\rangle = t\langle x, y\rangle \geqslant 0$ donc $tx \in \mathcal{K}^\circ$ et cet ensemble est bien un semi-cône. C'est un ensemble convexe car si $t \in [0,1]$, $(x,y) \in \mathcal{K}^\circ$ et $z \in \mathcal{K}$, alors

   $$\langle tx + (1-t)y, z\rangle = t\langle x, z\rangle + (1-t)\langle x, z\rangle \geqslant 0 (\text{car } t \geqslant 0 \text{ et } 1-t \geqslant 0).$$

   Il est fermé car si $(x_n)_{n\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^\circ$ converge vers un certain $x \in H$, alors on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle x_n, y\rangle \leqslant 0$ donc par continuité du produit scalaire et en faisant $n \to \infty$, on a $\langle x, y\rangle \leqslant 0$ et donc on a bien $x \in \mathcal{K}^\circ$.

2. Soit $x \in F$ et $t \geqslant 0$, alors $tx \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel.

   Il est trivial que $F^\perp \subset F^\circ$ car si $x \in F^\perp$ et $y \in F$ alors $\langle x, y\rangle = 0 \leqslant 0$.

   Inversement, soit $x \in F^\circ$ et $y \in F$. Alors par définition de F°, $\langle x, y\rangle \geqslant 0$, mais puisque F est un sous-espace vectoriel on a aussi que $-y \in F$, donc encore une fois par définition de F°, $-\langle x, y\rangle \leqslant 0$. Ainsi, on a que $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a bien que $x \in F^\perp$.

3. Soit $x \in H$ tel que $P_\mathcal{K}(x) = 0$. Alors par la caractérisation angulaire, on a que pour tout $y \in \mathcal{K}$, on a $\langle x - P_\mathcal{K}(x), y - P_\mathcal{K}(x)\rangle \leqslant 0$, i.e. $\langle x, y\rangle \leqslant 0$ et donc $x \in \mathcal{K}^\circ$.

   Inversement si $x \in \mathcal{K}^\circ$, et $y \in \mathcal{K}$, alors $\langle x - 0, y - 0\rangle \leqslant 0$ et de plus $0 \in \mathcal{K}$ (prendre $t = 0$ dans la définition), donc par caractérisation de la projection orthogonale, on a nécessairement $0 = P_\mathcal{K}(x)$.

4. Soit $x \in H$. Alors il est clair par définition de la projection orthogonale que $P_\mathcal{K}(x) \in \mathcal{K}$. De plus, pour tout $y \in \mathcal{K}$, on a $\langle x - P_\mathcal{K}(x), y - P_\mathcal{K}(x) \leqslant 0$. On commence par prendre $y = 0 \in \mathcal{K}$, ce qui donne $-\langle x - P_\mathcal{K}(x), P_\mathcal{K}(x) \leqslant 0$. Maintenant, on prend $y = 2P_\mathcal{K}(x)$. Alors $y \in \mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est un cône. On en déduit $\langle x - P_\mathcal{K}(x), P_\mathcal{K}(x) \leqslant 0$, ce qui donne bien finalement $\langle x - P_\mathcal{K}(x), P_\mathcal{K}(x) = 0$.

   Enfin, si $y \in \mathcal{K}$, alors par la caractérisation angulaire de la projection orthogonale, on a $\langle x - P_\mathcal{K}(x), y - P_\mathcal{K}(x)\rangle \leqslant 0$, mais par le point précédent $\langle x - P_\mathcal{K}(x), P_\mathcal{K}(x)\rangle = 0$ donc on en déduit $\langle x - P_\mathcal{K}(x), y - P_\mathcal{K}(x)\rangle \leqslant 0$, ce qui est exactement la définition du fait que $x - P_\mathcal{K}(x) \in \mathcal{K}^\circ$. Ainsi $P_\mathcal{K}(x)$ vérifie bien les 3 propriétés demandées.

   De plus, c'est le seul car si $p \in H$ est tel que $p \in \mathcal{K}$, $\langle x - p, p\rangle = 0$ et $x - p \in \mathcal{K}^\circ$, alors si $y \in \mathcal{K}$ et par définition de $\mathcal{K}^\circ$, alors par la caractérisation angulaire de la projection orthogonale, on a $\langle x - p, y\rangle \leqslant 0$, mais $\langle x - p, p\rangle = 0$ donc on a finalement que $\langle x - p, y - p\rangle \leqslant 0$ avec $p \in \mathcal{K}$ donc par caractérisation angulaire de la projection orthogonale, on a $p = P_\mathcal{K}(x)$.

5. Soit $x \in \mathcal{K}$ et $y \in \mathcal{K}^\circ$, alors par définition de $\mathcal{K}^\circ$, on a $\langle y, x\rangle \leqslant 0$ et par symétrie du produit scalaire, ceci donne $\langle x, y\rangle \leqslant 0$, et par définition on a bien $x \in (\mathcal{K}^\circ)^\circ$.

6. On utilise intelligemment l'indication, un peu dans l'esprit de la démonstration de cours de sur le double orthogonal d'un espace vectoriel fermé. On a par le deuxième point de la question 4 que

   $$||x - P_\mathcal{K}(x)||^2 = \langle x - P_\mathcal{K}(x), x - P_\mathcal{K}(x)\rangle = \langle x - P_\mathcal{K}(x), x\rangle.$$

Par le troisième point de la question 4, on a

$$\langle x - P_{\mathcal{K}}(x), x \rangle \leqslant 0.$$

On a donc montré que $||x - P_{\mathcal{K}}(x)||^2 \leqslant 0$, autrement dit, puisqu'une norme est toujours positive, que $||x - P_{\mathcal{K}}(x)|| = 0$, et donc $x = P_{\mathcal{K}}(x)$. Ceci signifie exactement que $x \in \mathcal{K}$.

7. D'abord, on remarque que $0 \in \mathcal{K}$ et cet ensemble est bien non vide. Soit $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathcal{K}$. Par définition, pour tout $i \in [1, n]$, on a $x_i \geqslant 0$. Si $t \geqslant 0$, on a alors aussi que $tx_i \geqslant 0$ et par définition de $\mathcal{K}$, on a bien $tx \in \mathcal{K}$.

   Maintenant, si $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathcal{K}$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathcal{K}$ et $t \in [0, 1]$, alors pour tout $i \in [1, n]$ on a $tx_i + (1 - t)y_i \geqslant 0$ et donc par définition de $\mathcal{K}$, on a bien $tx + (1 - t)y \in \mathcal{K}$.

   Enfin, cet ensemble est trivialement fermé comme produit cartésien d'ensembles fermés de $\mathbb{R}$ (à savoir $\mathbb{R}^+$).

   Il est évident que $\mathcal{K}^\circ = (\mathbb{R}^-)^n$. En effet, si $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathcal{K}^\circ$, alors en prenant $y = (0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{K}$ où le 1 est en j-ième position, on doit avoir $\langle x, y \rangle \leqslant 0$, i.e. $x_j \leqslant 0$. et ceci pour tout j. Inversement, si $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in (\mathbb{R}^-)^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 0$$

   et par définition du semi-cône polaire on a bien $x \in \mathcal{K}^\circ$.

   Pour calculer $P_{\mathcal{K}}$, on utilise la question 4. Si $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in H$, alors $p = P_{\mathcal{K}}(x) = (p_1, \dots p_n)$ est tel que $p_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [1, n]$, tel que $\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)p_i = 0$ et tel que $x - p \in \mathcal{K}^\circ$, i.e. $x_i \leqslant p_i$ pour tout $i \in [1, n]$. Mais ceci donne donc que $(x_i - p_i) \leqslant 0$, donc par légalité précédente, p_i est tel qu'à i fixé, soit $p_i = 0$, soit $p_i \neq 0$ et dans ce cas on doit avoir $x_i - p_i = 0$, i.e.$p_i = x_i$. Autrement dit, $p_i = \max(0, x_i)$. Un raisonnement totalement analogue donnerait que la projection sur $\mathcal{K}^\circ$, notée $q = (q_1, \dots, q_n)$, est donnée par $q_i = \min(0, x_i)$.

Exercice 2 (Un problème variationnel, 10 points).

1. Soit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V est telle que $v_n \to V \in H^1(0, 1)$, alors on a par définition que de V que pour tout n, $v_n(0) = kv_n(1)$. La fonction évaluation en un point x (i.e. $f \in H^1(0, 1) \mapsto f(x)$) étant continue , on peut faire $n \to \infty$ dans l'égalité précédente pour obtenir $v(0) = kv(1)$ et donc le résultat voulu.

2. On utilise le théorème de représentation. On a $v(1) = v(0) + \int_0^1 v'(t)dt$, autrement dit $v(1) = kv(1) + \int_0^1 v'(t)dt$, et donc en faisant rentrer la valeur absolue de l'intégrale puis en utilisant l'inégalité de Jensen, on a

$$|v(1)| = \frac{|\int_0^1 v'(t)dt|}{|1 - k|} \leqslant \frac{||v'||_{L^1(0,1)}}{|1 - k|} \leqslant \frac{||v'||_{L^2(0,1)}}{|1 - k|}.$$

   De la relation $v(0) = kv(1)$, on en déduit que

$$|v(0)| \leqslant \frac{|k|}{|1 - k|} ||v'||_{L^2(0,1)}.$$

3. on utilise le théorème de représentant continu, l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Jensen et la question précédente. Si $x \in [0, 1]$, on a

$$|v(x)| = |v(0) + \int_0^x v'(t)dt| \leqslant |v(0)| + ||v'||_{L^1(0,1)} \leqslant \frac{|k|}{|1 - k|} ||v'||_{L^2(0,1)} + ||v'||_{L^2(0,1)} \leqslant C||v'||$$

   avec $C = 1 + \frac{|k|}{|1-k|}$. Ceci étant vrai pour tout x et C étant indépendant de x, on en déduit que

$$||v||_{\infty,[0,1]} \leqslant C||v'||_{L^2(0,1)}.$$

   Comme on a que $||v||_{L^2(0,1)} \leqslant ||v||_{\infty,[0,1]}$, on en déduit une inégalité de Poincaré du type

$$||v||_{L^2(0,1)} \leqslant C||v'||_{L^2(0,1)}.$$

4. $a(\cdot,\cdot)$ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

   Elle est positive car on a que $\left(\int_0^1 u\right)^2 \leqslant int_0^1(u^2)$ par Jensen donc

$$a(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 (u^2) - \left(\int_0^1 u\right)^2 \geqslant \int_0^1 (u')^2 \geqslant 0.$$

   Enfin, elle est définie car si $a(u,u)=0$, alors par les inégalité précédentes, nécessairement $\int_0^1 (u')^2 = 0$, mais par la question précédente ceci donne que $||u||_\infty = 0$, autrement dit que $u=0$ presque partout et donc $u=0$ partout puisque u est continue.

   On remarque que $a(u,u) \geqslant \int_0^1 (u')^2$. Mais on a aussi par la question 3 que

$$\int_0^1 (u')^2 \geqslant \frac{1}{C}\int_0^1 (u)^2,$$

   on en déduit donc que

$$a(u,u) \geqslant \tilde{C}||u||^2_{H^1(0,1)}$$

   pour une certaine constante $\tilde{C}$ indépendante de u.

   Inversement, il est trivial sur l'expression de a que

$$a(u,u) \leqslant \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 (u)^2 \leqslant ||u||^2_{H^1(0,1)}.$$

   Ceci donne l'équivalence des normes.

   Les normes étant équivalentes, les topologies aussi, et V muni du produit scalaire induit par a est un espace de Hilbert.

5. On a que

$$\left|\int_0^1 fv\right| \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}||v||_{L^2(0,1)} \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}||v||_{H^1(0,1)} \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}||v||_a,$$

   où ans la dernière inégalité on a utilisé l'équivalence des normes de la question précédente. Ainsi l'application $v \in V \mapsto \int_0^1 fv$ est une forme linéaire continu. On applique alors le Théorème de Riesz dans l'espace V muni du produit scalaire a, et on en déduit immédiatement l'existence et l'unicité de $u \in V$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv$ pour tout $v \in V$.

   Soit $f \in L^2(0,1)$, montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv, \forall v \in V$.

6. On utilise l'indication. On a que

$$a(u,\varphi) = \int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi - \int_0^1 \left(\int_0^1 u\right)\varphi = \int_0^1 f\varphi,$$

   ce qui donne

$$\int_0^1 u'\varphi' = \int_0^1 (u - \left(\int_0^1 u\right) + f).$$

   Par définition de la dérivée faible et puisque $u - \left(\int_0^1 u\right) + f \in L^2(0,1)$ (une constante est bien dans $L^2(0,1)$ puisque l'intervalle $(0,1)$ est borné), on a donc bien que $u \in H^1(0,1)$ et de plus la dérivée faible u'' vaut par définition

$$u'' = -u + \int_0^1 u - f.$$

7. Par propriété admise de cours, on sait déjà que $u'' = -u + \int_0^1 u - f$ presque partout. Reste à trouver les conditions aux bord.

   Une des conditions est donnée par l'espace V. Puisque la fonction solution u est dans V, on a déjà que $u(0) = ku(1)$. Pour ce faire, on intègre par parties l'expression $\int_0^1 u''v$, ce qui est bien autorisé car $u' \in H^1(0,1)$ et v aussi. On obtient

$$\int_0^1 u''v = -\int_0^1 u'v' + u'(1)v(1) - u'(0)v(0),$$

autrement dit

$$\int_0^1 (u + \int_0^1 u - f)v = -\int_0^1 u'v' + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Par la question 5, on en déduit que $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$, et ceci pour tout $v \in V$. En utilisant la relation $v(0) = kv(1)$, on en déduit que

$$(u'(1) - ku'(0))v(1) = 0, \ \forall v \in V.$$

On en déduit très facilement que $u'(1) = ku'(0)$ (prendre par exemple pour v une fonction affine valant 1 en $x = 1$ et valant k en $x = 0$, un telle fonction est clairement dans l'espace V).

Inversement, il est aisé de vérifier que tout fonction vérifiant l'équation donnée ainsi que ces conditions au bord est solution de la formulation faible étudiée.