Corrigé du partiel du 30 octobre 2017

Durée: 2 heures

Exercice 1 (3 points). 1. La formule de polarisation s'écrit comme

$$\forall (x,y) \in H^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

De $T(0) = 0$ on déduit que pour tout x on a $||T(x)|| = ||x||$. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in H^2, \langle T(x), T(y) \rangle = \frac{1}{4}\left(||T(x)+T(y)||^2 - ||T(x)-T(y))||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle T(x), T(y)\rangle - ||x-y||^2\right) =$$

Ainsi on a

$$\forall (x,y) \in H^2, \frac{1}{2}\langle T(x), T(y)\rangle = \frac{1}{4}\left(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2\right) = \frac{1}{2}\langle x, y\rangle,$$

d'où le résultat.

2.

$$\begin{aligned}
||T(x+y) - T(x) - T(y)||^2 &= ||T(x+y)||^2 + ||T(x)||^2 + ||T(y)||^2 - 2\langle T(x+y), T(x)\rangle - 2\langle T(x+y), T(y)\rangle + 2\langle T(x), T(y)\rangle \\
&= ||x+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x+y, x\rangle - 2\langle x+y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \\
&= ||x+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||^2 - 2\langle y, x\rangle - 2||y||^2 - 2\langle x, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \\
&= ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(On a utilisé que T conserve la norme et le produit scalaire, ainsi que la symétrie du produit scalaire)

3. T est linéaire: il suffit d'appliquer la question précédente avec un couple $(x, \lambda y)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque et $(x,y) \in H^2$, et remarquer que $T(\lambda y) = \lambda T(y)$ en développant $||T(\lambda y) - \lambda T(y)||^2$.

Exercice 2 (3 points). 1. $\mathcal{C}$ est fermé: on considère une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ qui converge vers $y \in H$ pour le produit scalaire. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Alors y_k est une suite donc on peut écrire $y_k = (y_{k,0}, y_{k,1}, \ldots)$. On décompose aussi $y = (y_0, y_1, \ldots)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{k,n} \in A$. Mais la convergence en norme l^2 nous dit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||y_{k,n} - y_n||^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui implique qu'à n fixé on a $y_{k,n} \to y_n$ quand $k \to \infty$ puisque pour tout m on a

$$||y_{k,m} - y_m||^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||y_{k,n} - y_n||^2.$$

Comme A est fermé, on a donc $y_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc par définition on a bien $y \in H$.

$\mathcal{C}$ est convexe: c'est simple, il suffit d'utiliser la convexité de A. On considère $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathcal{C}$ et $y = (y_0, y_1, \ldots) \in \mathcal{C}$, ainsi que $\lambda \in [0,1]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme A est convexe et que x_n et y_n sont dans A par définition, on obtient que $x_n + \lambda y_n \in A$, ce qui prouve bien que la suite $x + \lambda y$ est dans $\mathcal{C}$.

2. On appelle P_A la projection sur le convexe A dans le plan complexe $\mathbb{C}$. On considère une suite $x = (x_0, x_1, \ldots)$. On veut montrer que $P_{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \ldots) = (P_A(x_0), P_A(x_1), \ldots)$. Soit $x \in H$. On rappelle que $P_{\mathcal{C}}$ est caractérisé par la propriété:
$$\forall y \in \mathcal{C}, Re(\langle x - P_{\mathcal{C}}(x), y - P_{\mathcal{C}}(x)\rangle) \leqslant 0.$$
On décompose y en $y = (y_0, y_1, \ldots)$. Alors on a que
$$Re(\langle x - (P_A(x_0), P_A(x_1), \ldots), y - (P_A(x_0), P_A(x_1), \ldots)\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} Re((x_n - P_A(x_n))\overline{(y_n - P_A(x_n))}) \leqslant 0$$
puisque P_A est la projection sur A et que chaque y_n est dans A (donc par la caractérisation de la projection sur A, on a $Re((x_n - P_A(x_n))\overline{(y_n - P_A(x_n))}) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). D'où le résultat.

Problème: Théorème ergodique de Von Neumann et application [12 points]

Partie I

1. Un noyau est toujours un sous-espace vectoriel et le noyau d'une application continue est toujours fermée (image réciproque du singleton $\{0\}$).

2. Si $x \in Ker(I - T)$ alors $T(x) = x$ mais du coup pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi $T^n(x) = x$. Donc $T_n(x) = x$ qui tend vers x quand $n \to \infty$, et x est bien la projection de x puisque $x \in Ker(I - T)$.

3. On a $\langle T(x), x\rangle = \overline{\langle x, T(x)}$ mais si $\langle x, T(x)\rangle$ ou $\langle T(x), x\rangle$ est réel, alors les deux le sont et les quantités sont égales (le conjugué d'un réel est lui-même).

4. Si $T(x) = x$ alors évidemment $\langle T(x), x\rangle = ||x||^2$. Inversement, supposons que $\langle T(x), x\rangle = ||x||^2$. Si $x = 0$ alors le résultat est trivial. Supposons donc $x \neq 0$. Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$||x||^2 = \langle T(x), x\rangle \leqslant ||T(x)||||x|| \leqslant |||T|||||x||^2 \leqslant ||x||^2.$$
Donc toutes les inégalités sont en fait des égalités, et on est dans le cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, x et Tx sont colinéaires, et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Tx = \lambda x$. Mais dans ce cas $\langle Tx, x\rangle = \lambda ||x||^2 = ||x||^2$ donc nécessairement on a bien $\lambda = 1$ puisque x a été supposé non nul.

5. Soit $x \in Im(I - T)^\perp$. Alors, pour tout $z \in H$, on a $\langle x, z - Tz\rangle = 0$. On choisit $z = x$. On obtient $\langle x, x - Tx\rangle = 0$, i.e. $\langle T(x), x\rangle = ||x||^2$, et donc on a bien par la question précédente que $x \in Ker(I - T)$.

6. Par définition il existe $y \in H$ tel que $x = y - Ty$. Donc par téléscopage on a
$$T_n(x) = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}\left(T^k(y) - T^{k+1}(y)\right) = \frac{1}{n+1}(y - T^{n+1}(y)),$$
Donc
$$||T_n(x)|| \leqslant \frac{||y|| + ||T^{n+1}(y)||}{1+n} \leqslant \frac{||y|| + |||T^{n+1}|||.||y||}{1+n} \leqslant \frac{2||y||}{1+n},$$
car on sait que $|||T^{n+1}||| \leqslant |||T|||^{n+1} \leqslant 1^{n+1} \leqslant 1$. On obtient le résultat en faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente.

7. On utilise le fait que la norme subordonnée de T^k est plus petite que 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a que
$$||T_n(x)|| \leqslant \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}||T^k(x)|| \leqslant \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}||T^k||||x|| \leqslant \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}||x|| \leqslant ||x||.$$

8. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe $y \in Im(I - T)$ tel que $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.

   Donc
$$\begin{aligned}||T_n(x)|| &= ||T_n(x) - T_n(y) + T_n(y)|| \leqslant ||T_n(x) - T_n(y)|| + ||T_n(y)||\\ &\leqslant ||T_n(x - y)|| + ||T_n(y)|| \leqslant |||T_n|||.||x - y|| + ||T_n(y)|| \leqslant \varepsilon + ||T_n(y)||.\end{aligned}$$
   Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow ||T_n(y)|| \leqslant \varepsilon$. Donc $n \geqslant N \Rightarrow ||T_n(x)|| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui donne le résultat voulu.

9. On décompose H comme somme directe de $Ker(I-T)$ (qui est un sous-espace vectoriel fermé de H) et de son orthogonal. Soit $x \in H$. On décompose $x = y + z$ avec $y \in Ker(I-T)$ et $z \in Ker(I-T)^{\perp}$. Or la question 5 nous dit que $Im(I-T)^{\perp} \subset Ker(I-T)$. En passant à l'orthogonal, on en déduit que $Ker(I-T)^{\perp} \subset Im(I-T)^{\perp\perp} = \overline{Im(I-T)}$. On a alors par les questions 2 et 8 que $T_n(x) = T_n(y) + T_n(z) \to y$ quand $z \to \infty$. Le résultat s'ensuit puisque l'on a que $y = p(x)$ par propriété du cours.

Partie II

1. T est à valeurs dans H car il est clair par périodicité que

$$||T(f)||^2 = \int_0^{2\pi} |f|^2(x+\alpha)dx = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} |f|^2(y)dy = \int_0^{2\pi} |f|^2(y)dy.$$

Le fait que T soit linéaire est trivial et de plus on a $||T(f)|| = ||f||$ pour tout $f \in H$ donc T est une isométrie, elle est bien continue et de norme exactement égale à 1.

2. Par périodicité de f et $x \mapsto e^{inx}$ on a

$$c_n(T(f)) = \int_0^{2\pi} f(x+\alpha)e^{-inx}dx = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(y)e^{-in(y-\alpha)}dy = e^{in\alpha}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}dy = e^{in\alpha}c_n(f).$$

$Ker(I-T)$ est l'ensemble des fonctions f telles que $T(f) = f$. Comme $\{e^{ikt} | k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$, ceci équivaut à dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{in\alpha}c_n(f) = c_n(f)$. Pour $n = 0$, c'est automatiquement vrai, mais dès que $n \neq 0$ ceci implique nécessairement que $c_n(f) = 0$ car on ne peut avoir $e^{in\alpha} = 1$ puisque $n\alpha$ ne peut jamais être égal à $2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le seul coefficient de Fourier de f non nul est celui pour $n = 0$, et en écrivant f comme la somme presque partout de sa série de Fourier, on en déduit que f est constante presque partout.

3. $Ker(I-T) = Vect(x \mapsto 1) = Vect(x \mapsto e^{i.0.x})$. Une base orthonormée de $Ker(I-T)$ est donc $1/(\sqrt{2\pi})$. On a donc que la projection vaut exactement la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f = c_0(f)$.

4. Trivialement $T^n(x) = f(\cdot + n\alpha)$. On peut directement appliquer le théorème de Von Neumann car toutes les hypothèses sont vérifiées.