Corrigé de l'examen du 4 juillet 2018

Vrai ou faux? (2 points) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux? 0.5 point par réponse bonne, -0.5 point par réponse fausse, 0 point si non répondu.

1. VRAI: en effet par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^2$, on a équivalence entre la norme donnée dans l'énoncé et la norme usuelle. On a donc la même topologie, et notamment les mêmes suites de Cauchy, qui convergent donc bien. C'est un espace de Banach pour $||\cdot||$, mais ce n'est pas un espace de Hilbert car cette norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Il suffit de prendre par exemple les fonctions 1 et x. On a $2\left(||1||^2+||x||^2\right) = 2(1^2+(1/2+1)^2) = 26/4 = 13/2$ alors que $||1-x||^2+||1+x||^2 = (3/2)^2+(5/2)^2 = 34/4 = 17/2$.
2. FAUX: une telle fonction n'est même pas forcément dans $L^2(0,1)$... Exemple: $x \mapsto 1/x \in C^\infty(]0,1[)$ mais n'est pas dans $L^2(0,1)$. Par contre c'est vrai si on remplace $C^\infty(]0,1[)$ par $C^\infty([0,1])$ ou $C_0^\infty(]0,1[)$.
3. FAUX: dans la définition de $f \in H_0^1(0,1)$, il est nécessaire que f s'annule en 0 et 1, ce qui n'est pas le cas ici.
4. VRAI: on a démontré dans le cours que la famille $\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)|k \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,L)$, en faisant un raisonnement de prolongement par imparité sur $(-L,L)$, puis en translatant la base hilbertienne habituelle sur$(0,2L)$, à savoir la base des $\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)|k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)|k \in \mathbb{N}\}$. Il est très facile de voir que si l'on fait un prolongement par parité plutôt que par imparité, on obtient à la place les cosinus comme base.
5.

Exercice 1 (Itérés de certain opérateurs, 9 points)**.**

1. Soit B une partie bornée de H. Alors il existe un $R > 0$ tel que $B \subset B_f(0,R)$. Soit maintenant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{(I-T)(B)}$. Alors c'est aussi une suite de $\overline{(I-T)(B_f(0,R))}$. Mais par linéarité, on a
$$\overline{(I-T)(B_f(0,R))} = R\overline{(I-T)(B_f(0,1))} = \{Rz | z \in \overline{(I-T)(B_f(0,1))}\}.$$
Ainsi, on peut écrire $y_n = Rz_n$ avec $z_n \in \overline{(I-T)(B_f(0,1))}$. Par la propriété (iii), on extrait alors une suite convergente $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers un certain $z \in \overline{(I-T)(B_f(0,1))}$, de telle sorte que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $Rz \in \overline{(I-T)(B_f(0,R))}$. Or $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{(I-T)(B)}$, qui est fermé, on en déduit donc que $y \in \overline{(I-T)(B)}$. D'où le résultat voulu.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en utilisant (ii) et $T(0) = 0 \leqslant 0$, on a
$$||x_{n+1}-x_n|| = ||(1-T)x_n|| = ||(1-T)Tx_{n-1}|| = ||T(1-T)x_{n-1}|| = ||T(x_n - x_{n-1})|| \leqslant ||x_n - x_{n-1}||.$$
On en déduit que la suite est strictement décroissante, elle est aussi positive, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.
3. On démontre très facilement par récurrence que $||x_n|| \leqslant ||x||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$. Si on a $||x_n|| \leqslant ||x||$ alors on a bien $||x_{n+1}|| = ||Tx_n|| \leqslant ||x_n|| \leqslant ||x||$. On remarque maintenant que $x_{n+1}-x_n = (I-T)x_n$, et x_n est dans le borné $B(0,||x||)$. On peut donc appliquer la première question est dire que $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $(I-T)B_f(||x||)$, qui est un compact. On peut donc en extraire une sous suite convergente $(x_{n_k+1}-x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers un certain $y \in H$.
4. Par la question 2 que la suite $(||x_{n+1}-x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par la question 3, sa limite est donc nécessairement $||y||$. De plus, par continuité, la suite $(T(x_{n_k+1}-x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Ty. Mais cette suite vaut en fait $(x_{n_k+2}-x_{n_k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et est donc aussi une sous-suite de la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont la norme converge et converge donc nécessairement vers $||Ty||$. Par unicité de la limite, on a donc $||y||| = ||Ty||$. Ainsi, $y = 0$, car si $y \neq 0$, alors on a une contradiction avec (ii).

5. En utilisant la question 2 et la question 4, On a démontré que la suite $(||x_{n+1} - x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers $||y|| = 0$ ici. Autrement dit, la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle-même vers le vecteur 0.

6. Si $x \in Im(I-T)$, alors il existe $y \in H$ tel que $x = (I-T)y$. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit: $y_0 = y$ et $y_{n+1} = Ty_n$ (autrement dit on remplace le premier terme de la suite des itérés x par y). Alors, on a clairement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n - y_{n+1}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai à l'ordre n, on a $x_{n+1} = Tx_n = T(y_n - y_{n+1}) = y_{n+1} - y_{n+2}$. Or, en appliquant la question 5, en replaçant x par y, on sait que la suite $(y_{n+1} - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

7. On procède par double inclusion. Soit $x \in Ker(I-T)$. Alors $Tx = x$. Soit alors $z \in Im(I-T)$. Par définition, on a existence de $y \in H$ tel que $z = y - Ty$. On a alors, en utilisant la propriété (i),
$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - Ty\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Ty\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0,$$
et donc par définition on a bien $x \in Im(I-T)^{\perp}$. Inversement, si $x \in Im(I-T)^{\perp}$, alors, pour tout $y \in H$, on a $\langle x, y - Ty\rangle = 0$. En utilisant des calculs analogues à ceux précédents, on en déduit que $\langle x - Tx, y\rangle = 0$, pour tout $y \in H$. On en déduit donc bien $x = Tx$ (prendre par exemple $y = x - Tx$.)

   On a donc bien $Ker(I-T) = \overline{Im(I-T)}^{\perp}$. Or il est clair que $Ker(I-T) = \{0\}$, car comme déjà expliqué précédemment, si $Tx = x$ alors on a $x = 0$ par la propriété (ii). Par propriété de cours, ceci signifie que $Im(I-T)$ est dense dans H.

8. On effectue un raisonnement habituel par densité. Soit $x \in H$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, il existe un certain $z \in Im(I-T)$ tel que $||x - z|| \leqslant \varepsilon$. On pose alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit: $z_0 = z$ et $z_{n+1} = Tz_n$. On remarque alors que par récurrence, il est très facile en utilisant (ii) de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$||x_n - z_n|| \leqslant ||x - z|| \leqslant \varepsilon.$$
Maintenant, comme $z \in Im(I-T)$, on sait par la question 5 que $z_n \to 0$ quand $n \to \infty$: il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N \mapsto ||z_n|| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que si $n \geqslant N$, on a
$$||x_n|| \leqslant ||x_n - z_n|| + ||z_n|| \leqslant 2\varepsilon.$$
Ainsi, par définition, on a bien $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2 (Un problème elliptique d'ordre 4,8 points). 1. Si $u \in H^2(I)$, alors $u' \in H^1 I)$ donc $u' \in C^0([a, b]$. Comme on a déjà $u \in C^0([a, b])$, on en déduit bien que $u \in C^1([a, b])$. Ainsi, on peut bien définir $u(a), u(b), u'(a), u'(b)$ de telle sorte que l'espace a bien un sens. De plus, cet espace est fermé, en effet si $u_n \to u$ dans $H^2(I)$ avec $u_n \in H_0^2(I)$, alors par la continuité de la fonction évaluation en un point $c \in \bar{I}$, donnée par $f \in H^1(I) \mapsto f(c)$, que l'on applique successivement à $u_n - u$ et $u_n' - u'$, on a existence de $C_c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $||u_n(c) - u(c)|| \leqslant C_c||u_n - u||_{H^1(I)}$ et $||u_n'(c) - u'(c)|| \leqslant C_c||u_n'(c) - u'(c)||_{H^1(I)} \leqslant C_c||u_n - u||_{H^2(I)}$. Ainsi, en faisant $n \to \infty$, on en déduit que pour tout $c \in barI$, on a $u_n(c) \to u(c)$ et $u_n'(c) \to u'(c)$. En prenant $c = a$ puis $c = b$, on obtient $u(a) = u(b) = u'() = u'(b) = 0$. Donc $H_0^2(I)$ est bien fermé.

2. Comme $u' \in H_0^1(I)$, on a existence de $C_1 > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^2(0, 1)$, on ait
$$||u'||_{L^2(0,L)} \leqslant C_1||u''||_{L^2(0,L)}.$$
Comme u lui-même est aussi dans $H_0^1(I)$, on a existence de $C_2 > 0$ tel que pour tout $u \in H^2(0, 1)$, on ait
$$||u||_{L^2(0,L)} \leqslant C_2||u'||_{L^2(0,L)}.$$
On obtient donc le résultat voulu en prenant $C = \max\{C_1, C_1C_2\}$.

3. Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$, et $v \in H_0^2(I)$. On multiplie l'équation par v et on intègre sur I. On obtient
$$-\int_I u''''(x)v(x)\,dx = \int_I f(x)v(x)\,dx.$$
Or $v \in H_0^1(I)$, on peut donc faire une IPP en oubliant les termes de bord, pour obtenir
$$-\int_I u''''(x)v(x)\,dx = \int_I u'''(x)v'(x)\,dx.$$

Par définition, on a aussi $v' \in H_0^1(I)$, de telle sorte qu'on peut refaire une IPP en oubliant les termes de bord, pour obtenir

$$\int_I u'''(x)v'(x)\ dx = -\int_I u''(x)v''(x)\ dx.$$

D'où le résultat.

4. On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H_0^2(I)$ muni du produit scalaire de l'espace $H^2(0,1)$, avec $a(u,v) = \int_I u''(x)v''(x)dx$ et $l(v) = -\int_I f(x)v(x)dx$. l est clairement linéaire, elle est aussi continue car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|l(v)| \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}||v||_{L^2(0,1)} \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}||v||_{H^2(0,1)}.$$

a est clairement une forme bilinéaire, elle est aussi trivialement continue car

$$|a(u,v)| \leqslant ||u''||_{L^2(0,1)}||v''||_{L^2(0,1)} \leqslant ||u||_{H^2(0,1)}||v||_{H^2(0,1)}.$$

Reste à montrer que a est coercive. Ceci provient des inégalités de type Poincaré de la question 2: il est clair que

$$||u||^2_{H^2(0,1)} \leqslant (1+C^2)||u''||^2_{L^2(0,1)} = (1+C^2)a(u,u),$$

ce qui donne la coercivité. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui donne l'existence et l'unicité d'un $u \in H_0^2(I)$.

5. la forme bilinéaire a étant symétrique, on peut dire que le u de la question précédente est l'unique minimum de la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_I v''(x)^2 dx + \int_I f(x)v(x)dx.$$

6. Soit $\varphi \in C_i^0 nfty(I)$. Comme on set que $u \in H^3(I)$, on peut déjà écrire par définition de $H^3(I)$ que

$$\int_I u''\varphi'' = -\int_I u'''\varphi' = \int_I f\varphi.$$

Ainsi, on a bien $u''' \in H^1(I)$ et par définition, $-u'''' = f$. Or f est continue sur $[a,b]$. Ceci signifie que la $(u''')'$ est continue sur $[a,b]$. Donc par les résultats du cours, u''' qui au départ est seulement $H^1(I)$ est en fait bien $C^1([a,b])$. Autrement dit, on a bien u de classe C^4 sur I. De plus u''' est bien solution de $-u'''' = f$ et vérifie automatiquement les conditions au bord demandées puisque $u \in H_0^2(I)$.