Examen du 17 janvier 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Questions de cours. (4 points)

1. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert complexe. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz (sans le cas d'égalité).

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $p \in [1, \infty)$ (on exclut par simplicité le cas $p = \infty$). Soient $(u, v) \in \big(W^{1,p}(I)\big)^2$. Démontrer que $uv \in W^{1,p}(I)$ et calculer la dérivée faible $(uv)'$.

Exercice 1 (Semi-cônes et polarité, 9 points)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit $\mathcal{K}$ une partie de H, non vide. On suppose que $\mathcal{K}$ est un *semi-cône*, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{K}$, pour tout $t \geqslant 0$, on a $tx \in \mathcal{K}$. Pour tout semi-cône non vide $\mathcal{K}$, on appelle *semi-cône polaire* de $\mathcal{K}$ et on note $\mathcal{K}^\circ$ l'ensemble suivant:

$$\mathcal{K}^\circ := \{x \in H \text{ tel que } \langle x, y \rangle \leqslant 0, \forall y \in \mathcal{K}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{K}^\circ$ est un semi-cône convexe fermé non vide.

2. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que F est un semi-cône, puis que $F^\circ = F^\perp$.

On suppose pour toute la suite que $\mathcal{K}$ est un semi-cône convexe fermé non vide.

3. Démontrer que $\mathcal{K}^\circ = \{x \in H \text{ tel que } P_{\mathcal{K}}(x) = 0\}$, où $P_{\mathcal{K}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{K}$.

4. Soit $x \in \mathcal{H}$. Montrer que $P_{\mathcal{K}}(x)$ est caractérisé comme étant l'unique élément p de H vérifiant:
   - $p \in \mathcal{K}$,
   - $\langle x - p, p \rangle = 0$,
   - $x - p \in \mathcal{K}^\circ$.

   Indication: on pourra utiliser la caractérisation angulaire de la projection orthogonale.

5. Démontrer que $\mathcal{K} \subset (\mathcal{K}^\circ)^\circ$.

6. Démontrer que $(\mathcal{K}^\circ)^\circ \subset \mathcal{K}$. *Indication:* on pourra commencer par montrer que pour $x \in (\mathcal{K}^\circ)^\circ$ on a $||x - P_{\overline{\mathcal{K}}}(x)||^2 = 0$.

7. Exemple: soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On pose $\mathcal{K} = (\mathbb{R}^+)^n$. Montrer que $\mathcal{K}$ est un semi-cône convexe fermé non vide. Calculer son semi-cône polaire et en déduire l'expression de $P_{\mathcal{K}}$ et de $P_{\mathcal{K}^\circ}$.

Exercice 2 (Un problème variationnel, 10 points)**.** On considère l'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$ et la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv - \left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 v\right).$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$, on note $V = \{u \in H^1(0, 1) | u(0) = ku(1)\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$.
2. Montrer que pour tout $v \in V$, on a $|v(1)| \leqslant \frac{1}{|1-k|}||v'||_{L^2(0,1)}$, et en déduire une inégalité sur $|v(0)|$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in V$, on ait $||v||_{\infty,[0,1]} \leqslant C||v'||_{L^2(0,1)}$. Que dire de $||v||_{L^2(0,1)}$ par rapport à $||v'||_{L^2(0,1)}$?
4. Montrer que $a(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur V. *Indication:* comparer $\left(\int_0^1 u\right)^2$ à $\int_0^1 (u^2)$.

   Montrer la norme associée à a (notée $||\cdot||_a$) est équivalente sur V à la norme $H^1(0,1)$. Que dire de l'espace $(V, a(\cdot,\cdot))$?
5. Soit $f \in L^2(0,1)$, montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv, \forall v \in V$.
6. Montrer que $u' \in H^1(0,1)$. *Indication:* on pourra considérer $a(u,\varphi)$ avec $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, et remarquer que $\left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 \varphi\right) = \int_0^1 \left(\int_0^1 u\right)\varphi$.

   On note u'' la dérivée faible de u'. Exprimer u'' à l'aide de u, $\int_0^1 u$ et f.
7. Interpréter le problème différentiel résolu (i.e. trouver l'équation différentielle et les conditions aux limites satisfaites par u). *Indication:* on pourra intégrer par parties $\int_0^1 u''v$ pour $v \in V$, en justifiant.