# Partiel du 30 octobre 2017

*Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.*

Durée: 2 heures

**Questions de cours.** (4 points)

1. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $H$. Énoncer et démontrer les 3 propriétés vues en cours de la projection orthogonale sur $F$ (en admettant les propriétés vraies pour un convexe fermé quelconque).
2. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit $A$ une partie de $H$. À quoi est égal $A^{\perp\perp}$? Le démontrer.

**Exercice 1** (3 points)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $T$ une application de $E$ dans $E$. On suppose que $T$ conserve les distances, i.e. $\forall (x, y) \in H^2, ||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$, et vérifie de plus $T(0) = 0$.

1. Rappeler la formule de polarisation dans le cas réel. En déduire que $\forall (x, y) \in H^2, \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. Soit $(x, y) \in H^2$. Développer et simplifier au maximum $||T(x + y) - T(x) - T(y)||^2$.
3. Que peut-on en déduire sur $T$?

**Exercice 2** (3 points)**.** Soit $H = l^2(\mathbb{C})$ muni du produit scalaire hermitien canonique: si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$, alors $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$. Soit $A$ une partie convexe fermée de $\mathbb{C}$. On note

$$\mathcal{C} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H | x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée de $H$.
2. Calculer la projection sur $\mathcal{C}$.

## Problème: Théorème ergodique de Von Neumann et application [12 points]

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ un opérateur linéaire continu de $H$ dans $H$, supposé de norme d'opérateur $|||T|||$ inférieure ou égale à 1. On pose $I$ l'application identité de $H$ dans $H$. Soit $p$ la projection orthogonale sur $Ker(I - T)$. On pose

$$T_n := \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n} T^k,$$

la puissance étant à comprendre au sens de la composition. Le but de la première partie du problème est de démontrer le théorème suivant:

**Théorème 1** (Théorème ergodique de Von Neumann)**.** *Pour tout $x \in H$, on a*

$$T_n(x) \to p(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

En deuxième partie, une application de ce résultat sera proposée.

**Partie I**

On note $Im(I-T)$ l'image de $I-T$.

1. Justifier succinctement que $Ker(Id-T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$.
2. Soit $x \in Ker(I-T)$. Démontrer que l'on a bien $T_n(x) \to p(x)$ quand $n \to \infty$.
3. Soit $x \in H$. Démontrer que $\langle x, T(x) \rangle = ||x||^2 \Leftrightarrow \langle T(x), x \rangle = ||x||^2$.
4. Soit $x \in H$. Démontrer que $x = T(x) \Leftrightarrow \langle T(x), x \rangle = ||x||^2$. *Indication: pour le sens réciproque, on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à* $\langle T(x), x \rangle$.
5. En déduire que $Im(I-T)^{\perp} \subset Ker(I-T)$.
6. Soit $x \in Im(I-T)$. Démontrer que $T_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||T_n||| \leqslant 1$.
8. Soit $x \in \overline{Im(I-T)}$. Démontrer que $T_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.
9. Conclure.

**Partie II**

On pose $H = \{f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$. Pour $f \in H$, on notera toujours $f$ le prolongement $2\pi-$périodique de $f$ sur $\mathbb{R}$, et on notera $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ l'ensemble des coefficients de Fourier de $f$. On rappelle que $\{e^{ikt} | k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

Le but de cette partie et de démontrer que pour $f \in H$ et presque tout $x \in (0, 2\pi)$ on a

$$\frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} f(x+k\alpha) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \text{ quand } n \to \infty.$$

On pose $T : f \in H \mapsto (x \in (0, 2\pi) \mapsto f(x+\alpha))$.

1. Montrer que $T$ est un opérateur linéaire continu de $H$ dans $H$, de norme d'opérateur exactement égale à 1.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $c_n(T(f))$ en fonction de $c_n(f)$. En déduire que $Ker(I-T)$ est l'ensemble des fonctions constantes presque partout.
3. Soit $f \in H$, calculer la projection orthogonale de $f$ sur $Ker(I-T)$.
4. Conclure.