Examen du 4 juillet 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Question de cours. (2 points) Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel fermé. Démontrer que $F \bigoplus F^\perp = H$, $Id = \Pi_F + \Pi_{F^\perp}$ (où Π_E désigne la projection orthogonale sur le convexe E), et pour tout $x \in H$, $||x||^2 = ||\Pi_F(x)||^2 + ||x - \Pi_F(x)||^2$.

Vrai ou faux? (2 points) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux (sans justification)? 0.5 point par réponse bonne, -0.5 point par réponse fausse, 0 point si non répondu.

1. On munit $H^1(0,1)$ de la norme suivante: $||f|| = \int_0^1 |f| + \int_0^1 |f'|$. Pour cette norme, $H^1(0,1)$ est un espace de Banach qui n'est pas un espace de Hilbert, dont la norme (et donc la topologie, i.e. les ouverts, fermés,...) est équivalente à l'espace de Hilbert $H^1(0,1)$ muni de son produit scalaire usuel.
2. Si $f \in C^\infty(]0,1[)$, alors $f \in H^1(0,1)$.
3. On se place sur l'intervalle $]0,1[$ et on considère la fonction f suivante:
$$f(x) = x \text{ si } x \in]0,1/2[\text{ et } f(x) = 1/2 \text{ si } x \in [1/2,1[.$$
Alors $f \in H_0^1(0,1)$ et sa dérivée au sens des distributions vaut
$$f'(x) = 1 \text{ si } x \in]0,1/2[\text{ et } f'(x) = 0 \text{ si } x \in [1/2,1[.$$
4. Soit $L > 0$. $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) | k \in \mathbb{N} \right\}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,L)$.

Exercice 1 (Itérés d'un certain opérateur, 9 points)**.** Soit $(H, \langle \rangle)$ un espace de Hilbert réel. On rappelle qu'une partie C de H est dite compacte si de toute suite d'éléments de C, on peut extraire une sous-suite convergente dans C. On rappelle qu'une partie compacte est notamment une partie fermée et bornée (i.e. inclus dans une boule fermée) de H.

Soit $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $\forall (x,y) \in H \times H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

(ii) $\forall x \in H \setminus \{0\}$, $||Tx|| < ||x||$.

(iii) $I - T$ est compact (ici, I désigne l'opérateur identité de H dans H), au sens que $\overline{(I-T)(B_f(0,1)}$ (l'adhérence de l'image de la boule fermée unité par $I - T$) est une partie compacte de H.

1. Soit B une partie bornée de H. Montrer que $\overline{(I-T)(B)}$ est une partie compacte de H.

Soit $x \in H$. on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit: $x_0 = x$ et $x_{n+1} = Tx_n$.

2. Montrer que la suite $(||x_{n+1} - x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Qu'en déduire sur cette suite?
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire qu'il existe une sous suite $(x_{n_k+1} - x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente. On note y sa limite.
4. Montrer que y vérifie $||y|| = ||Ty||$. En déduire que $y = 0$.

5. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. On suppose $x \in Im(I-T)$. Montrer que $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

7. Montrer que $Ker(I-T) = Im(I-T)^{\perp}$. En déduire que $Im(I-T)$ est dense dans H.

8. On suppose $x \in H$. Montrer que $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2 (Un problème elliptique d'ordre 4,8 points)**.** Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert, borné de $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème

$$u''''(x) = f(x) \text{ dans } [a,b], \qquad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0,$$

où f est une application continue sur $[a,b]$. Dans toute la suite, on introduit les espaces suivants:

$$\begin{aligned}
&H^2(I) = \{u \in H^1(I) | u' \in H^1(I)\},\\
&H_0^2(I) = \{u \in H^2(I) | u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\},\\
&H^3(I) = \{u \in H^2(I) | u'' \in H^1(I)\},\\
&H^4(I) = \{u \in H^2(I) | u''' \in H^1(I)\}.
\end{aligned}$$

ainsi que les normes suivantes, toutes issues d'un produit scalaire facile à expliciter:

$$\begin{aligned}
||u||_{H^2(I)} &= \sqrt{||u||^2_{L^2(I)} + ||u'||^2_{L^2(I)} + ||u''||^2_{L^2(I)}},\\
||u||_{H^3(I)} &= \sqrt{||u||^2_{L^2(I)} + ||u'||^2_{L^2(0,1)} + ||u''||^2_{L^2(I)} + ||u'''||^2_{L^2(I)}},\\
||u||_{H^4(I)} &= \sqrt{||u||^2_{L^2(I)} + ||u'||^2_{L^2(I)} + ||u''||^2_{L^2(I)} + ||u'''||^2_{L^2(I)} + ||u''''||^2_{L^2(I)}}.
\end{aligned}$$

On admet que les espaces $H^i(a,b)$, pour $i = 2,3,4$, sont des espaces de Hilbert.

1. Montrer que si $u \in H^2(I)$, alors $u \in C^1([a,b])$. En déduire que l'espace $H_0^2(I)$ est bien défini. Montrer que $H_0^2(I)$ est fermé dans $H^2(I)$.

2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^2(I)$, on ait

$$||u'||_{L^2(I)} \leqslant C||u''||_{L^2(I)} \text{ et } ||u||_{L^2(I)} \leqslant C||u''||_{L^2(I)}.$$

3. Montrer que, si u est une solution de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$, alors pour toute fonction $v \in H_0^2(I)$ on a

$$\int_I u''(x)v''(x)\ dx = \int_I f(x)v(x)\ dx.$$

4. Montrer l'existence d'une unique fonction $u \in H_0^2(I)$ telle que

$$\int_I u''(x)v''(x) = \int_I f(x)v(x)\ dx, \qquad \forall v \in H_0^2(I)\ .$$

5. Exprimer le problème précédent comme un problème de minimisation.

6. On admet que $u \in H^3(I)$. Montrer que $u \in H^4(I)$, puis finalement que u est de classe $\mathcal{C}^4$ et vérifie l'équation demandée.