TD 1: Espaces de Hilbert et applications

Généralités.

Exercice 1 (Identité du parallélogramme généralisée)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $n \in [|2, +\infty|[$. Soit $(x_1, \ldots x_n) \in H^n$. Montrer que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} ||\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n||^2.$$

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Démontrer que c'est un produit scalaire.
2. Trouver une suite de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers exp sur $[0, 1]$.
3. En déduire $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \exp$ pour la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.
4. Que peut-on en déduire sur $(\mathbb{R}[X], \langle , \rangle)$?

Exercice 3 (Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan)**.** Soit E un espace de Banach réel muni d'une norme $|| \cdot ||$ vérifiant l'égalité du parallélogramme:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right), \forall(x, y) \in E^2.$$

On pose

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}\left(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right), \forall(x, y) \in E^2.$$

On se propose de vérifier que cette expression est un produit scalaire vérifiant de plus $\langle x, x\rangle = ||x||^2$.

1. Vérifier que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$, et $\langle x, 2y\rangle = 2\langle x, y\rangle$, $\forall(x, y) \in E^2$.
2. Montrer que $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall(x, y, z) \in E^3$.
3. Montrer que $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\forall(\lambda, x, y) \in (\mathbb{R} \times E^2)$. On traitera d'abord le cas $\lambda \in \mathbb{N}$ puis $\lambda \in \mathbb{Z}$ puis $\lambda \in \mathbb{Q}$.
4. Conclure.

Exercice 4 (Complexification d'un espace de Hilbert réel)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. On considère l'espace vectoriel produit $H^{\mathbb{C}} := H \times H$, où l'on pose par définition, pour $(x, y) \in H \times H$, $i.(x, y) := (-y, x)$.

1. Trouver une addition et une loi de multiplication externe qui permettent de munir $H^{\mathbb{C}}$ d'une structure d'espace vectoriel complexe. Démontrer que la restriction de cette structure aux réels coïncide avec la structure d'espace vectoriel produit sur $H \times H$.
2. On identifie H à $H \times \{0\}$. Identifier iH à un sous-espace vectoriel réel de $H^{\mathbb{C}}$. Montrer qu'en tant qu'espace vectoriel réel, $H^{\mathbb{C}}$ est la somme directe de H et iH.
3. On considère $(z_1, z_2) \in H^{\mathbb{C}} \times H^{\mathbb{C}}$, que l'on décompose de manière unique sous la forme $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. On pose alors
$$\langle z_1, z_2\rangle_{H^{\mathbb{C}}} := \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle + i\left(\langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle\right).$$
Montrer que c'est l'unique produit scalaire hermitien qui prolonge le produit scalaire sur H.

L'espace $H^{\mathbb{C}}$ est appelé le *complexifié* de H.

Théorème de projection sur un convexe fermé.

Exercice 5. On considère l'espace $E = (C^0([-1,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, et F le sous-espace vectoriel formé des fonctions impaires dont l'intégrale est nulle sur $[0,1]$. Soit $\varphi : t \in [-1,1] \mapsto t$.

1. Montrer que F est fermé.
2. Montrer que $d(\varphi, F) \geqslant 1/2$.
3. Existe-t-il $\psi \in F$ tel que $||\varphi - \psi||_\infty = 1/2$?
4. Montrer que $d(\varphi, F) = 1/2$. *Indication: essayer "d'approcher" $t - 1/2$ par des fonctions de F.*
   Commenter.

Exercice 6. On considère l'espace $E = (C^0([-1,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ et D la droite engendrée par $x \mapsto 1 - x$. Montrer que la distance de D à la fonction $x \mapsto 1$ est atteinte en plusieurs points. Commenter.

Exercice 7. Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace de Hilbert. Calculer la projection sur la boule unité fermée.

Exercice 8. Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace de Hilbert. Démontrer que tout convexe fermé admet un unique élément de norme minimale.

Exercice 9. Soit $H = l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On note $C := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \geqslant 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et calculer la projection orthogonale sur C.

Exercice 10 (Convexes emboîtés et projection, I)**.** Soit $(C_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de convexes fermés d'un espace de Hilbert $H, \langle,\rangle$ tels que $C_1 \supset C_2 \ldots \supset C_n \supset \ldots$. On pose $C_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ et on suppose que $C_\infty \neq 0$. On note P_i la projection sur le convexe fermé C_i.

1. Montrer que C_∞ est un convexe fermé. On note P_∞ le projection sur le convexe C_∞.
2. Pour $h \in H$, on pose $a_i = P_i(h)$. Démontrer que la suite $||h - a_i||_{i\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.
3. Montrer que $a_i \to P_\infty(h)$ quand $i \to \infty$. On commencera par montrer que $(a_i)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, en utilisant la question précédente.

Exercice 11 (Convexes emboîtés et projection, II)**.** Soit $(C_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de convexes fermés d'un espace de Hilbert $H, \langle,\rangle$ tels que $C_1 \subset C_2 \ldots \subset C_n \subset \ldots$. On pose $C_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$.On note P_i la projection sur le convexe fermé C_i.

1. Montrer que C_∞ est un convexe fermé. On note P_∞ le projection sur le convexe C_∞.
2. Pour $h \in H$, on pose $a_i = P_i(h)$. Montrer que $a_i \to P_\infty(h)$ quand $i \to \infty$. On commencera par montrer que $(a_i)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 12 (Théorème de Hahn-Banach, version géométrique et Hilbert)**.** On considère C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert réel $(H, \langle,\rangle)$.

1. Soit $x \in H$. Démontrer qu'il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que
   $$f(x) < \alpha < f(y), \forall y \in C.$$
   Que ceci signifie-t-il géométriquement?
2. En déduire que tout convexe fermé propre (i.e. non égal à H tout entier) s'écrit comme une intersection de demi-espaces fermés.
3. Démontrer que tout sous-espace vectoriel fermé strict s'écrit comme intersection d'hyperplans fermés.
4. Soit $\widehat{C}$ un autre ensemble convexe non vide, supposé compact, tel que $C \cap \widehat{C} = \emptyset$. Démontrer qu'il existe $f \in H'$ tel que
   $$\sup_{x\in C} f(x) < \inf_{y\in\widehat{C}} f(y).$$
   Que ceci signifie-t-il géométriquement?
   Cette propriété reste-t-elle vraie si on suppose $\widehat{C}$ seulement fermé?

Exercice 13 (Espérance conditionnelle)**.** On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Démontrer les différentes propriétés suivantes de l'espérance conditionnelle:

1. Si Z est $\mathcal{G}-$mesurable et essentiellement bornée, alors $\mathbb{E}[ZE[X|\mathcal{G}]] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
3. Si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
4. Si Z est $\mathcal{G}-$mesurable et essentiellement bornée, alors $\mathbb{E}[XZ|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
5. Si X est $\mathcal{G}-$mesurable, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
6. Si φ est une fonction convexe telle que $\varphi(X)$ est intégrable alors $E[\varphi(X)|\mathcal{G}] \geqslant \varphi(E[X|\mathcal{G}])$.

Théorème de Riesz.

Exercice 14. Soit E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire hermitien usuel.

1. Montrer que l'application $\varphi : u = (u_n) \in E \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E.
2. Existe-t-il un élément $a \in E$ tel que $\varphi(u) = \langle a, u\rangle$? Que peut-on en déduire sur E?

Exercice 15 (Théorème de Radon-Nykodym, version faible)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, soit μ et ν deux mesures finies sur X. On suppose que quel que soit le mesurable A, on a $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

1. Démontrer que pour toute fonction h mesurable positive, on a $\int_X h(x)d\nu(x) \leqslant \int_X h(x)d\mu(x)$.
2. En déduire que $L^2(\mu) \subset L^2(\nu)$ et que pour tout $g \in L^2(\mu)$ on a $||g||_{L^2(\nu)} \leqslant ||g||_{L^2(\mu)}$.
3. Montrer que $\varphi : g \in L^2(\mu) \mapsto \int_X g(x)d\nu(x)$ est une forme linéaire continue.
4. En déduire qu'il existe une fonction f mesurable telle que ν soit la mesure de densité de f par rapport à μ, i.e. pour tout mesurable A, on a $\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x)$.

Exercice 16 (Universalité de la convolution)**.** Soit f une fonction de R^N ($N \in \mathbb{N}^*$) à valeurs réelles. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $\tau_x f : y \mapsto f(y - x)$. Un opérateur T agissant sur des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$ est dit invariant par translation si $T(\tau_x f) = \tau_x(Tf)$.

On considère dorénavant $T : L^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ un opérateur linéaire continu et invariant par translation.

1. Montrer que $f \mapsto Tf(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)'$.
2. En écrivant que $Tf(x) = \tau_{-x}(Tf)(0)$, en déduire l'existence de $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $Tf(x) = f * g(x)$.

Exercice 17 (Adjoint d'un opérateur)**.** Soit u un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert réel ou complexe $(H, \langle, \rangle)$ et $y \in H$.

1. Montrer qu'il existe un unique $z \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $\langle u(x), y\rangle = \langle x, z\rangle$.

On pose $u^* : y \mapsto z$ défini précédemment. u^* est appelé adjoint de u.

2. Démontrer que u^* est un opérateur linéaire continu et que $||u^*|| \leqslant ||u||$.
3. Montrer que $u^{**} = u$.
4. Montrer que $||u^*|| = ||u||$.
5. Montrer que l'application $u \in \mathcal{L}_c(H) \mapsto u^* \in \mathcal{L}_c(H)$ est anti-linéaire, continue, bijective d'inverse continu.
6. Soit v un autre endomorphisme continu de H. Montrer que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
7. Montrer que $||u^* \circ u|| = ||u||^2 = ||u \circ u^*||$.
8. Montrer que $\mathrm{Ker(u^*)} = \mathrm{Im(u)}^\perp$. Que vaut $\mathrm{Ker(u^*)}^\perp$?

Exercice 18 (Calculs de quelques adjoints)**.**

1. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. On considère $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que T est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

2. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On considère $S : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, \ldots) \mapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (0, u_0, u_1, \ldots)$. Montrer que S est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

3. On considère $H = L^2([0,1], C)$ et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère $U : f \in H \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y) dy\right)$. Montrer que U est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

Exercice 19 (Triplet de Gelfand canonique)**.** On considère $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On considère $H = L^2_\mu(\Omega, \mathbb{R})$. On se donne m une fonction mesurable telle qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour presque tout $x \in \Omega$ on a $m(x) \geqslant \delta$, et telle que $m(x) < \infty$ presque partout. On considère $\{= f \text{ mesurable} \mid \int_\Omega m f^2 d\mu < \infty\}$.

1. Vérifier que $V \subset H$ avec inclusion continue et V est dense dans H.

2. Identifier V' avec un espace simple.

Orthogonalité et bases hilbertiennes.

Exercice 20. Soit E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire hermitien usuel. On considère l'application $\varphi : u = (u_n) \in E \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$, qui est une forme linéaire continue sur E.

1. Montrer que $Ker(\varphi)$ est un hyperplan fermé, et que $Ker(\varphi)^\perp = \{0\}$.

2. De manière plus générale, si $(H, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien (réel ou complexe) non complet, démontrer qu'il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à 0. *Indication: on admettra que H peut être plongé dans un espace de Hilbert $(\widehat{H}, \langle , \rangle)$, et que H est dense dans $\widehat{H}$.*

Exercice 21. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $M = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H | \sum_{k=0}^n x_k = 0\}$.

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de H.

2. Trouver le supplémentaire orthogonal de M.

3. Calculer la distance de la suite $(1, 0, 0, \ldots)$ à M.

Exercice 22 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)**.** Soit un espace de Hilbert réel $(H, \langle , \rangle)$ et $p \in \mathcal{L}_c(H)$ un projecteur de H, i.e. un endomorphisme continu vérifiant $p \circ p = p$.

1. Démontrer que H s'écrit comme somme directe de $Im(p)$ et $Ker(p)$.

2. Démontrer que p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow$ p est 1-Lipschitzien. *Indication: pour le sens $\Leftarrow$, on fera un dessin et regarder un $x \in (Ker(p))^\perp$.*

Exercice 23. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire L^2. Soit $C = \{f \in E | f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Commenter.

Exercice 24. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormale peut se compléter en une base hilbertienne de H.

Exercice 25.

1. Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx,$$

puis trouver

$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx$$

parmi les $g \in L^2(-1,1)$ soumis à la contrainte

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx = 0; \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

2. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $x_0 \in H$ et M un sous-espace vectoriel fermé de H, énoncer le problème de maximisation associé au problème $\min_{x \in M} ||x_0 - x||$ sur le modèle de la question précédente.

Exercice 26. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, et $V = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0\}$.
On rappelle que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ désigne les fonctions C^∞ à support compact (i.e. nulles en dehors d'un compact), que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel et que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 1$. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \phi_n(t) = \frac{1}{n}\phi\Big(\frac{t}{n}\Big).$$

   (a) Montrer que

$$\phi_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \text{ dans } H.$$

   (b) Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$h = g - \Big(\int_{\mathbb{R}} g(t)dt\Big)\phi_n.$$

   Montrer que la fonction h appartient au sous-espace V.

2. En déduire que

$$V^\perp \subset C_c^\infty(\mathbb{R})^\perp.$$

3. Conclure que le sous-espace V est dense dans H.

Exercice 27 (Théorème d'échantillonnage de Shannon)**.** On considère

$$BL^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | \widehat{f} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]\}.$$

1. Montrer que BL^2 est un sous-espace fermé de L^2. On considérera donc maintenant que BL^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire L^2.
2. Montrer que toute fonction$f \in BL^2$ est continue et de plus $||f||_\infty \leqslant ||f||_2$.
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de $[-1/2, 1/2]$. On appellera cette fonction sinc.
4. on pose $\tau_x f : y \mapsto f(y - x)$. Montrer que $\{\tau_k(\text{sinc}) | \text{k} \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de BL^2. Interpréter ce résultat. Que donne la formule de Parseval dans ce cas-là?
5. On décompose $f \in BL^2$ comme $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \tau_k(\text{sinc})(\text{x})$. Démontrer que la convergence de cette série est uniforme.
6. Démontrer que tout $f \in BL^2$ est une fonction entière.

Exercice 28 (Polynômes orthogonaux)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction ρ mesurable, strictement positive, telle que $\int_I |x|^n \rho(x) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrale pour la mesure de densité ρ, muni de son produit scalaire canonique

$$\langle f, g \rangle := \int_I \rho(x) f(x) \bar{g}(x) dx.$$

On rappelle que cet espace est un espace de Hilbert.

1. Montrer que $L^2(I, \rho)$ contient l'ensemble des polynômes.
2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes unitaires $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonale et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = n$.
3. Démontrer que les zéros des polynômes P_n sont distincts, réels et tous dans l'intervalle I. On introduira le polynôme $S(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)$, où x_i sont les points à l'intérieur de I où P_n change de signe.
4. Démontrer que pour $n \geqslant 1$ on a la formule par récurrence $P_{n+1} = (x - A_n)P_n - B_n P_{n-1}$, où

$$A_n = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \text{ et } B_n = \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0.$$

En déduire qu'entre (au sens strict) chaque racine du polynôme P_n se trouve exactement une racine de P_{n+1}.

6. Exemple (polynômes d'Hermite): on pose $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$ (c'est bien une fonction poids).
   (a) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n(X) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{dx^n}} e^{-x^2} \right).$$

   (c) Montrer que $||P_n||_2 = \pi^{1/4}\sqrt{n!}$.

   Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n^\xi(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi x)^k}{k!}.$$

   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P_n^\xi(x) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-i\xi x}$.
   (e) Montrer que $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |P_n^\xi(x)| \leq e^{|\xi x|}$.
   (f) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle P_n, f \rangle = 0$. Soit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$.
   (g) Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(x) dx = 0.$$

   Indication. On pourra calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} P_n^\xi(x) g(x) dx$.

   (h) En déduire que f est identiquement nulle.

   (i) Donner une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

7. Déduire de l'exemple précédent une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Autres applications.

Exercice 29. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On rappelle que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\forall (x,y) \in H^2, < x, y >_H = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Les fonctions bilinéaires suivantes sont-elles continues et coercives sur H ?

(i) $a(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_{n+1}$, (ii) $b(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{n+1} y_{n+1}$,

(iii) $c(x,y) = x_0 y_0 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n)$, (iv) $d(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(x_{n+1} y_{n+1} + 2x_n y_{n+1} + 2x_n y_n \Big)$.

Exercice 30 (Théorème de Babuska-Lax-Milgram, 1971)**.** On considère deux espaces de Hilbert réels $(U, \langle , \rangle)$ et $(V, (|))$ et $a : U \times V$ une forme bilinéaire continue, i.e. $\exists \beta > 0$ tel que pour tout $(u,v) \in U \times V$, on a $|a(u,v)| \leqslant \beta ||u||_U ||v||_V$. On suppose de plus que a est faiblement coercive au sens suivant: il existe $\alpha > 0$ tel que $\sup_{||v||=1} |a(u,v)| \geqslant c||u||$ et pour tout $v \neq 0 \in H$, on a $\sup_{||u||=1} |a(u,v)| > 0$. Soit $l \in V'$.

Démontrer qu'il existe un unique $u \in U$ tel que $a(u,v) = l(v), \forall v \in V$.

Exercice 31 (Equation de Schrödinger)**.** Soit $L > 0$. On considère l'équation suivante, appelée équation de Schrödinger avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times]0,L[, \\ u(0,x) = u_0(x) & \in C^4[0,L], \\ u(t,x=0) = u(t,x=L) = 0 & \text{sur } [0,\infty[. \end{cases} \tag{1}$$

Une solution de (1) est une fonction $u \in C^1([0,T] \times [0,L]$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, on a $x \mapsto u(t,x) \in C^2([0,L])$, vérifiant (1).

1. Chercher les solutions de cette équation à variables séparées.
2. Démontrer l'existence d'une solution.
3. Montrer que toute solution u à (1) est telle que son énergie est conservée:

$$\int_0^L u^2(t)dt = \int_0^L u_0^2(x)dx.$$

   On pourra multiplier la première ligne de (1) par $\bar{u}$, intégrer sur $[0,L]$ puis effectuer une intégration par parties.
4. En déduire l'unicité des solutions.
5. Démontrer que u est en fait définie sur $\mathbb{R} \times [0,L]$. Cette propriété est appelée réversibilité en temps.

Exercice 32 (Equation de la chaleur $2D$)**.** Soit $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$. Considère l'équation suivante, appelée équation de la chaleur sur un rectangle avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u - \partial_{yy} u = 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times]0,L_1[\times]0,L_1[, \\ \lim\limits_{t\to 0^+} u(0,x) = u_0(x) & \in L^2([0,L_1] \times [0,L_2]), \\ u(t,0,y) = u(t,L_1,y) = 0 & \text{sur }]0,\infty[\times[0,L_2], \\ u(t,x,0) = u(t,x,L_2) = 0 & \text{sur }]0,\infty[\times[0,L_2]. \end{cases}$$

Sur le modèle de ce qui a été fait en cours pour l'équation de la chaleur, démontrer l'existence d'une unique solution (dans une classe appropriée) pour cette équation. *Indication: on démontrera que sur les fonctions à variables x et y séparées sont denses dans $L^2(]0,L_1[\times]0,L_2[)$.*

Exercice 33 (Base orthonormale d'ondelettes de Haar)**.** On considère

$$\psi(x) : \begin{cases} x \in [0,1/2[\mapsto 1 \\ x \in [-1/2,1] \mapsto -1 \\ x \notin [0,1] \mapsto 0. \end{cases}$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\psi_{j,k}(x) := \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\psi(\frac{x-2^j k}{2^j}).$$

Le but est est de démontrer que les $\psi_{j,k}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On note par la suite W_j l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ constantes sur les intervalles de la forme $2^j + z$ avec $z \in \mathbb{Z}$ et de moyenne nulle.

1. Montrer que les $\psi_{j,k}$ forment une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de W_j.
3. Démontrer que les fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à moyenne nulle sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$.

   Indication: pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on pourra s'intéresser pour $R > 0$ à $f - \frac{\int_{\mathbb{R}} f}{R}\chi_{[0,R]}$.
4. En déduire que les $\psi_{j,k}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.