# TD 2: Espaces de Sobolev et problèmes elliptiques linéaires $1D$

**Exercice 1.** 1. Soit $I = ]-1, 1[$. Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $H^1(I)$ ?

(i) $a(x) = |x|$, (ii) $b(x) = 0$, si $x \leq 0$, 1 sinon, (iii) $c(x) = x^\alpha$ si $x \geq 0$, 0 sinon, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soit $I = ]0, 1[$, et $1 \leq p \leq +\infty$. Pour quelles valeurs de $p$ les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $W^{1,p}(I)$ ?

(i) $d(x) = |2x - 1|$, (ii) $e(x) = x^\beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$, (iii) $f(x) = |\ln(x)|^\gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.** Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$. Montrer que $J \subset I \Rightarrow W^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(J)$.

**Exercice 3** (Une caractérisation de $H^1(I)$)**.** Soit $I := ]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Pour tout $0 < \alpha < (b - a)/2$, on note $I_\alpha := ]a + \alpha; b - \alpha[$.

1. (i) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([a; b])$, alors pour tout $\alpha$ comme ci-dessus,

$$|u(x + h) - u(x)|^2 \leq h^2 \int_0^1 |u'(x + sh)|^2 ds \qquad \forall x \in I_\alpha,\ \forall h \in \mathbb{R},\ |h| < \alpha\ .$$

   (ii) En déduire que pour toute fonction $u \in H^1(I)$, tout intervalle $I_\alpha$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq \|u'\|_{L^2(I)},$$

   où $\tau_h u(x) = u(x + h)$.

2. Réciproquement, on suppose que $u \in L^2(I)$ est telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle $I_\alpha$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq C\ .$$

   (i) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et $\alpha > 0$ tel que $\phi$ a un support dans $I_\alpha$. Montrer que, si $|h| < \alpha$,

$$\int_{I_\alpha} (u(x + h) - u(x))\phi(x)dx = \int_I u(x)(\phi(x - h) - \phi(x))dx\ .$$

   En déduire que

$$\left| \int_I u(x)\phi'(x)dx \right| \leq C\|\phi\|_2\ .$$

   On pose $T(\phi) = \int_I u(x)\phi'(x)dx$ pour $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$.

   (ii) Soit $\phi \in L^2(I)$. Montrer que, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}_c^1(I)$ qui converge vers $\phi$, alors la suite $(T(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (iii) En utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^1(I)$ dans $L^2(I)$, montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\Phi$ sur $L^2(I)$ telle que

$$\Phi(v) = \int_I u(x)v'(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^1(I)\ .$$

   (iv) En conclure que $u \in H^1$.

**Exercice 4.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $p > 1$ et $p'$ son exposant conjugué. Démontrer que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, on existence de $C > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \overline{I}^2$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^{\frac{1}{p'}}.$$

(Un telle fonction est dite $1/p'-$Hölderienne.)

**Exercice 5.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $u \in W^{1,\infty}(I)$ alors $u$ est bornée et Lipschitzienne.

2. Inversement, on suppose $u$ bornée est Lipschitzienne. Démontrer que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. *Indication: on pourra admettre que toute fonction Lipschitzienne est dérivable presque partout et étudier cette dérivée.*

**Exercice 6** (Dual de $H_0^1$ sur un intervalle borné)**.** On considère $a < b$ deux réels et $I = ]a, b[$. On identifie $L^2(a, b)$ avec son dual. On rappelle qu'on munit $H_0^1(a, b)$ de la norme $||u||_{H_0^1(a,b)} = ||u'||_{L^2(a,b)}$.

1. Démontrer que $H_0^1(a, b) \subset L^2(a, b)$ avec inclusion continue, et que $H_0^1(a, b)$ est dense dans $L^2(a, b)$.

2. On note $H^{-1}(a, b)$ le dual de $H_0^1(a, b)$ avec espace pivot $L^2(a, b)$. Montrer que pour tout $F \in H^{-1}(a, b)$, il existe un unique (au sens unique presque partout) $f \in L^2(a, b)$, appelé représentant de $F$, tel que $F(v) = \int_a^b fv', \forall v \in H_0^1(a, b)$. Montrer que $|||F||| = ||f||_{L^2(a,b)}$.

3. On munit $H^{-1}(a, b)$ du produit scalaire suivant: si $f_1$ est le représentant de $F_1$ et $f_2$ est le représentant de $F_2$, alors $\langle F_1, F_2\rangle_{H^{-1}(a,b)} = \int_a^b f_1 f_2$. Montrer que $L^2(a, b) \subset H^{-1}(a, b)$ avec injection continue, et que $L^2(a, b)$ est dense dans $H^{-1}(a, b)$.

**Exercice 7.** On considère l'espace $H^1(0, \infty)$.

1. Démontrer que pour tout $v \in H^1(0, \infty)$, on a $v(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. *Indication: on appliquera la critère de Cauchy en* $+\infty$.

2. On considère l'application $v \in H^1(0, \infty) \mapsto ||v'||_{L^2(0,\infty)}$. Montrer que c'est une norme. Est-elle équivalente à la norme $H^1$ usuelle?

**Exercice 8** (Inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger)**.** On considère $a < b$ deux réels et $I = ]a, b[$, et $p \in [1, \infty]$. Pour $u \in L^1(a, b)$, on pose $vm(u) := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt$.

1. Pour $p = 2$, démontrer l'inégalité de Poincaré suivante: pour tout $u \in H_0^1(0, \pi)$, on a

$$||u||_{L^2(0,\pi)} \leqslant ||u'||_{L^2(0,\pi)}.$$

   On pourra considérer une base hilbertienne bien choisie de $L^2(0, \pi)$. Montrer que cette inégalité est optimale au sens qu'il existe des fonctions telles qu'on ait égalité dans cette inégalité, et trouver toutes les fonctions vérifiant cette égalité.

2. Donner un résultat analogue sur l'intervalle $I = ]a, b[$.

3. Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger: il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, on ait

$$||u - vm(u)||_{L^p(a,b)} \leqslant C||u'||_{L^p(a,b)}.$$

**Exercice 9** (Inégalité de Nash, 1958)**.** On souhaite démontrer l'inégalité de Nash: il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$, on a

$$||f||^3_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C||f||_{L^1(\mathbb{R})}||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On notera $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de $f$. On considère un certain $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$||\widehat{f}||_\infty \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2. Exprimer $||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}$ à l'aide de $\widehat{f}$.

3. Soit $R > 0$. Démontrer que

$$||\widehat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2R||\widehat{f}||_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{R^2}||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

4. En choisissant un $R > 0$ adéquat, conclure. *Indication: on pourra choisir $R$ en fonction de $||f||_{L^1(\mathbb{R})}$ et $||f'||_{L^2(\mathbb{R})}$ à certaines puissances, et ajuster correctement les puissances.*

**Exercice 10.** Soit $p \geqslant 1$. On se demande s'il est possible d'avoir une inégalité de la forme suivante: il existe $q \geqslant 1$ et $C > 0$ tel que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on ait

$$||f||_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant C||f'||_{L^q(\mathbb{R})}.$$

On suppose cette inégalité vraie.

Appliquer cette inégalité à $g(x) = f(\lambda x)$, pour un certain $\lambda > 0$. En déduire une condition nécessaire sur la valeur de $q$. Conclure.

**Exercice 11.** Soit $\varepsilon > 0$. On pose $f_\varepsilon(t) := \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$, et $f_\varepsilon(t) = 0$ sinon.

1. Montrer que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $u \in H^1(I)$.

2. Montrer que $f_\varepsilon(u) \to u^+$ quand $\varepsilon \to 0$, où $u^+ = \max(u, 0)$.
3. En utilisant la définition de la dérivée faible de $f_\varepsilon(u)$, démontrer que $u^+ \in H^1(I)$ et que $(u^+)' = 1_{u>0}u$.
4. En déduire que $|u| \in H^1(I)$ et calculer la dérivée faible de $|u|$ en fonction de celle de $u$.

**Exercice 12.** Soit $L^2_{\text{per}}$ l'ensemble des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi$-périodiques et de carré intégrable sur $(0, 2\pi)$. On considère l'espace de Sobolev $H^1_{\text{per}}$ des fonctions de $L^2_{\text{per}}$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2_{\text{per}}$. $H^1_{\text{per}}$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in (H^1_{\text{per}})^2, < f, g >_{H^1_{\text{per}}} = < f, g >_{L^2_{\text{per}}} + < f', g' >_{L^2_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}\right)dt.$$

On rappelle également que la famille $\{e^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (définie par $e^n(t) = e^{int}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) est une base hilbertienne de $L^2_{\text{per}}$. On définit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

1. Soit $f \in H^1_{\text{per}}$. On rappelle que $f$ admet un représentant qui se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

a. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques $2\pi$-périodiques. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ telle que

$$P_n \underset{n\to+\infty}{\to} f' \text{ dans } L^2_{\text{per}}.$$

b. En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ telle que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f \text{ dans } H^1_{\text{per}}.$$

c. Conclure que $\mathcal{P}$ est dense dans $H^1_{\text{per}}$.

2. Soit $f \in L^2_{\text{per}}$.

a. On suppose que $f$ appartient à $\mathcal{P}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f).$$

b. En déduire que cette formule reste vraie si $f$ appartient à $H^1_{\text{per}}$.

3. Soit $H = \{f \in L^2_{\text{per}}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 < +\infty\}$. On munit l'espace $H$ du produit scalaire suivant

$$\forall (f,g) \in H^2, < f, g >_H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2) c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

a. Vérifier que $H$ est un espace de Hilbert.
b. On souhaite montrer que les espaces $H^1_{\text{per}}$ et $H$ sont identiquement égaux.
(i) Vérifier que $H^1_{\text{per}}$ est un sous-espace fermé de $H$, et que

$$\forall (f,g) \in (H^1_{\text{per}})^2, < f, g >_{H^1_{\text{per}}} = < f, g >_H \ .$$

*Indication. On pourra utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.*
(ii) Montrer que l'orthogonal de $H^1_{\text{per}}$ pour le produit scalaire $< \ , \ >_H$ est égal à $\{0\}$.
(iii) Conclure.

**Exercice 13.** Soit $f \in L^2(0,1)$ et $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv, \forall v \in H^1(0,1)$.
2. Vérifier que $u' \in H^1(0,1)$ et interpréter le problème différentiel résolu (i.e. trouver l'équation différentielle et les conditions aux limites satisfaites par $u$).

**Exercice 14.** Soit $V = \{u \in H^1(0,1) | u(1/2) = 0\}$.

1. Montrer que $V$ est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$ et que $v \in V \mapsto ||v'||_{L^2(0,1)}$ est une norme sur $V$ équivalente à la norme $H^1$.
2. Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $\int_0^1 u'v' = v(0), \forall v \in V$.
3. Interpréter le problème résolu, déterminer explicitement $u$. A-t-on $u' \in H^1(0,1)$?

**Exercice 15.** On considère le problème de Dirichlet sur un intervalle borné $]a,b[$

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } ]a,b[, \qquad u(a) = 0, \ u(b) = 0,$$

où $f \in L^\infty(a,b)$.

1. Rappeler les résultats vus en cours sur cette équation. Montrer que $u' \in H^1(a,b)$.
2. Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $G$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $K = ||f||_\infty$. Montrer que $G(u-K) \in H^1_0(I)$.
3. En déduire que $||u||_{L^\infty(a,b)} \leqslant ||f||_{L^\infty(a,b)}$.

**Exercice 16** (Problème de Sturm-Liouville avec conditions de Dirichlet)**.** Soit $I = ]0,1[$. On se donne deux fonctions $p$ et $q$ de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\text{p.p.en } x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq 0.$$

1. On pose

$$\forall (u,v) \in H^1_0(I)^2, a(u,v) = \int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire $a$ est continue et coercive sur $H^1_0(I)$.
b. Soit $f \in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u \in H^1_0(I)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(I), a(u,v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction $pu'$ appartient à l'espace $H^1(I)$ et que

$$-(pu')' + qu = f.$$

b. On se donne une fonction $v$ de $H_0^1(I)$, telle que la fonction $pv'$ appartienne à l'espace $H^1(I)$ et qui vérifie

$$-(pv')' + qv = f.$$

Montrer que

$$u = v.$$

3. On suppose de plus que la fonction $p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, et que les fonctions $q$ et $f$ sont continues sur $I$. Montrer que la fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$, et qu'elle est solution de l'équation

$$-pu'' - p'u' + qu = f, \ u(0) = u(1) = 0.$$

**Exercice 17** (Problème de Neumann)**.** Soit $I = ]0,1[$. On se donne deux fonctions $p$ et $q$ de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$\text{p.p.en } x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq \alpha.$$

1. On pose

$$\forall (u,v) \in H^1(I)^2, a(u,v) = \int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire $a$ est continue et coercive sur $H^1(I)$.
b. Soit $f \in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u \in H^1(I)$ telle que

$$\forall v \in H^1(I), a(u,v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction $pu'$ appartient à l'espace $H_0^1(I)$ et que

$$-(pu')' + qu = f.$$

b. On se donne une fonction $v$ de $H^1(I)$, telle que la fonction $pv'$ appartienne à l'espace $H_0^1(I)$ et vérifie

$$-(pv')' + qv = f.$$

Montrer que

$$u = v.$$

3. On suppose de plus que la fonction $p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, et que les fonctions $q$ et $f$ sont continues sur $I$. Montrer que la fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$, et qu'elle est solution de l'équation

$$-pu'' - p'u' + qu = f, \ u'(0) = u'(1) = 0.$$

**Exercice 18** ( Conditions de Neumann non homogènes)**.** Soit $I = ]a,b[$ un intervalle ouvert, borné de $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } [a,b], \qquad u'(a) = \alpha, \ u'(b) = \beta$$

où $f$ est une application continue sur $[a,b]$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, si $u$ est une solution de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour toute application $v \in H^1(I)$ on a

$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x) \ dx = \int_I f(x)v(x) \ dx + \beta v(b) - \alpha v(a) \ .$$

2. Montrer que la forme linéaire $\Phi(v) = \displaystyle\int_I f(x)v(x) \ dx + \beta v(b) - \alpha v(a)$ est continue sur $H^1(I)$.

3. En déduire l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(I)$ telle que

$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x) \ dx = \int_I f(x)v(x) \ dx + \beta v(b) - \alpha v(a) \qquad \forall v \in H^1(I) \ .$$

4. Montrer finalement que $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation demandée.