Corrigé de la question 2 de l'exercice 4

Première méthode (compliquée).

Elle reprend les calculs que j'ai commencé à faire, avant de les effacer. On écrit la définition du produit scalaire

$$\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y+z||^2 - ||x+y||^2 - ||z||^2\right).$$

on utilise maintenant l'égalité du parallélogramme de deux manières différentes:

$$||x+y+z||^2 = ||(x+y)+z||^2 = 2||x+y||^2 + 2||z||^2 - ||x+y-z||^2$$

et

$$||x+y+z||^2 = ||x+(y+z)||^2 = 2||x||^2 + 2||y+z||^2 - ||x-y-z||^2.$$

On somme les deux égalités. On obtient

$$2||x+y+z||^2 = 2||x+y||^2 + 2||z||^2 + 2||x||^2 + 2||y+z||^2 - ||x+y-z||^2 - ||x-y-z||^2.$$

Maintenant, on utilise encore l'égalité du parallélogramme pour écrire

$$||x+y-z||^2 = ||(x-z)+y||^2 = 2||x-z||^2 + 2||y||^2 - ||x-y-z||^2.$$

On injecte ceci dans l'égalité précédente pour obtenir

$$2||x+y+z||^2 = 2||x+y||^2 + 2||z||^2 + 2||x||^2 + 2||y+z||^2 - 2||x-z||^2 - 2||y||^2.$$

On divise tout par deux.

$$||x+y+z||^2 = ||x+y||^2 + ||z||^2 + ||x||^2 + ||y+z||^2 - ||x-z||^2 - ||y||^2.$$

On injecte dans la première égalité, et on simplifie tout ce qu'on peut.

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 + ||z||^2 + ||x||^2 + ||y+z||^2 - ||x-z||^2 - ||y||^2 - ||x+y||^2 - ||z||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y+z||^2 - ||x-z||^2 - ||y||^2\right).\end{aligned}$$

On utilise encore une fois l'égalité du parallélogramme pour dire que

$$||x+z||^2 + ||x-z||^2 = 2||x||^2 + 2||z||^2.$$

On obtient après réorganisation des termes

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y+z||^2 + ||x+z||^2 - 2||x||^2 - 2||z||^2 - ||y||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(||x+z||^2 - ||x||^2 - ||z||^2\right) + \frac{1}{2}\left(||y+z||^2 - ||y||^2 - ||z||^2\right) \quad = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Deuxième méthode (plus simple, ressemble à la suggestion faite par une étudiante).
On écrit la définition du produit scalaire

$$\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y+z||^2 - ||x+y||^2 - ||z||^2\right).$$

On écrit encore une fois l'égalité du parallélogramme, mais d'une manière plus astucieuse. Cela permet notamment de ne pas briser la symétrie comme avant.

$$||x+y+z||^2 = ||(x+\frac{z}{2}) + (y+\frac{z}{2})||^2 = 2||x+\frac{z}{2}||^2 + 2||y+\frac{z}{2}||^2 - ||x-y||^2.$$

Maintenant, on écrit l'inégalité du parallélogramme comme suit:

$$||x+\frac{z}{2}||^2 = ||\frac{x}{2} + \frac{x+z}{2}||^2 = \frac{2}{4}||x||^2 + \frac{2}{4}||x+z||^2 - \frac{1}{4}||z||^2 = \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||x+z||^2 - \frac{1}{4}||z||^2.$$

De même, on obtient

$$||y+\frac{z}{2}||^2 = \frac{1}{2}||y||^2 + \frac{1}{2}||y+z||^2 - \frac{1}{4}||z||^2.$$

On injecte les trois identités précédentes dans la première égalité. On obtient en utilisant une dernière fois l'identité du parallélogramme

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||x+z||^2 - \frac{1}{2}||z||^2 + ||y||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}||z||^2 - ||x-y||^2 - ||x+y||^2 - ||z||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||x+z||^2 - ||z||^2 + ||y+z||^2 - ||z||^2 - ||x-y||^2 - ||x+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||x+z||^2 - ||z||^2 + ||y+z||^2 - ||z||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||x+z||^2 - ||x||^2 - ||z||^2\right) + \frac{1}{2}\left(||y+z||^2 - ||y||^2 - ||z||^2\right) \\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.
\end{aligned}$$