Corrigé de l'Examen du 16 janvier 2019

Vrai ou faux? (2 points)

1. VRAI: ϵ_k est bien de carré sommable car nulle à partir d'un certain rang, sa norme vaut 1, et $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_l \rangle = 0$ dès que $k \neq l$. C'est donc une famille orthonormée. Elle est aussi totale puisque tout élément de H $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (a_1, a_2, \ldots)$ peut bien se réécrire sous la forme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k$.

2. FAUX. En effet, c'est déjà faux pour $L^\infty(0,1)$ et $L^1(0,1)$. Par exemple, la fonction identiquement égale à 1 est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ (elle-même et sa dérivée qui vaut 0 sont bornées) mais pas dans $W^{1,1}(\mathbb{R})$ puisque déjà pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

3. FAUX. En effet, toute limite de fonctions continues s'annulant en 0 s'annule aussi forcément en 0. Ceci se démontre de la manière suivante: si $u_n \to u$ dans $W^{1,1}(0,1)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in C^1([0,1])$ avec $u_n(0) = 0$, alors, par l'injection de Sobolev, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u(0)| = |u_n(0) - u(0)| \leqslant ||u_n - u||_{\infty,[0,1]} \leqslant C||u_n - u||_{W^{1,1}(0,1)}.$$
Le membre de droite tendant vers 0, on en déduit bien $u(0) = 0$, ce qui interdit la densité puisqu'une fonction de $W^{1,1}(0,1)$ n'a en général aucune raison de s'annuler en 0.

4. VRAI: cette fonction s'annule bien en 0 et 1. De plus, pour u est C^1 sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ avec $u'(x) = -1$ si $x < 0$ et $u'(x) = 1$ si $x > 0$, de telle sorte que l'on a bien toujours pour x positif ou négatif que $u(x) - u(0) = |x| = \int_0^x g(t)dt$, où g est la fonction définie par $g(x) = u'(x)$ pour $x \neq 0$ et $g(x) = 0$ (par exemple). g étant dans $L^2(0,1)$, on en déduit par le critère du cours que $u \in W^{1,2}(0,1)$.

Exercice 1.

1. il suffit de remarquer que $\langle P_E(x), y\rangle = \langle P_E(x), P_E(y)\rangle + \langle P_E(x), y - P_E(y)\rangle = \langle P_E(x), P_E(y)\rangle$ puisque $y - P_E(y) \in E^\perp$ et $P_E(x) \in E$. De même pour $\langle x, P_E(y)\rangle$.

2. C'est quasiment une question de cours: on sait que pour tout $x \in H$, on a
$$||P_E(x)||^2 = ||x||^2 - ||x - P_E(x)||^2 \leqslant ||x||^2,$$
avec égalité si et seulement si $x = P_E(x)$, i.e. $x \in E$. Ainsi, en revenant à la définition de $|||P_E|||$, on a bien $|||P_E||| \leqslant 1$ et l'égalité est atteinte pour tout élément de E, on a donc bien $|||P_E||| = 1$.

3. L'expression (Cos) a bien un sens car par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $e \in E$ et tout $f \in F$ tels que $||e|| = ||f|| = 1$, $|\langle e, f\rangle| \leqslant 1.1 = 1$, autrement dit $-1 \leqslant \langle e, f\rangle \leqslant 1$. Ainsi,
$$-1 \leqslant \sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||=||f||=1} \langle e, f\rangle \leqslant 1$$
et il existe donc un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que (Cos) soit vérifié (car cos est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$). De plus, on ne peut pas avoir $\theta > \frac{\pi}{2}$, puisque dans ce cas, on aurait
$$\sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||=||f||=1} \langle e, f\rangle < 0,$$
ce qui est impossible car si il existe $e \in E, f \in F$ avec $||e|| = ||f|| = 1$ tel que $\langle e, f\rangle < 0$, alors $\langle e, -f, \rangle > 0$ avec toujours $-f \in F$ et $|||f||| = 1$, de telle sorte que le sup est strictement positif.

Si $E \cap F \neq \{0\}$, soit $e \in E \cap F$ avec $e \neq 0$. Alors, quitte à renormaliser e, on peut toujours supposer que $||e|| = 1$, et on a alors $\langle e, e\rangle = ||e||^2 = 1$, de telle sorte que
$$\sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||=||f||=1} \langle e, f\rangle = 1$$

(puisqu'il est forcément dans $[0,1]$) et donc $\theta = 0$.

Inversement, dire que $\theta = \frac{\pi}{2}$ équivaut à dire que pour tout $e \in E$ et tout $f \in F$ tels que $||e|| = ||f|| = 1$, on a $\langle e, f\rangle = 0$, mais cette propriété s'étend pour des vecteurs non forcément de norme 1, autrement dit E et F sont orthogonaux.

4. Montrons que $\cos(\theta) = |||P_E \circ P_F|||$. En effet, E et F jouant un rôle parfaitement symétrique dans la définition de θ (par symétrie du produit scalaire), on aura aussi $\cos(\theta) = |||P_F \circ P_E|||$.

   Commençons par remarquer que l'on peut aussi écrire $\cos(\theta)$ comme étant

$$\cos(\theta) = \sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||\leqslant 1,\, ||f||\leqslant 1} \langle e, f\rangle.$$

   En effet, il est clair que

$$\cos(\theta) \leqslant \sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||\leqslant 1,\, ||f||\leqslant 1} \langle e, f\rangle$$

   car on prend un sup sur un ensemble plus grand à droite. Inversement, pour e et f tels que $||e|| \leqslant 1$ et $||f|| \leqslant 1$, supposés non nuls et tels que $\langle e, f\rangle \geqslant 0$ (c'est suffisant puisque $\cos(\theta) \geqslant 0$), , on a

$$\langle e, f\rangle \leqslant \langle \frac{e}{||e||}, \frac{f}{||f||}\rangle \leqslant cos(\theta).$$

   En prenant le supremum sur tous les $e \in E$ et $f \in F$, de norme inférieure à 1, on en déduit l'inégalité voulue.

   Maintenant, on remarque que si $e \in E$ et $f \in F$ avec $||e|| = ||f|| = 1$, en utilisant la question 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle e, f\rangle = \langle P_E(e), P_F(f)\rangle = \langle e, P_E(P_F(f))\rangle \leqslant ||e||.||P_E \circ P_F(f)|| \leqslant |||P_E \circ P_F|||.$$

   En prenant le sup, on obtient bien $\cos(\theta) \leqslant |||P_E \circ P_F|||$. On suppose dorénavant que $P_E \circ P_F \neq 0$, le cas $P_E \circ P_F = 0$ étant évident (il suffit de reprendre les calculs ci-dessus, on a nécessairement $cos(\theta) = 0$). Si l'on prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $||x_n|| = 1$ et $||P_E(P_F(x_n))|| \to |||P_E \circ P_F|||$, et $y \in H$ tel que $||y|| = 1$. Alors, on a par la question 2 que $||P_E(y)|| \leqslant 1$ et $||P_F(x_n)|| \leqslant 1$, de telle sorte que $\langle P_E(x_n), P_F(y)\rangle \leqslant cos(\theta)$. On remarque maintenant que grâce à la question 1, on a $\langle P_E(y), P_F(x_n)\rangle = \langle y, P_E(P_F(x_n))\rangle$. On applique ceci avec n assez grand et $y = \frac{P_E(P_F(x_n))}{||P_E(P_F(x_n))||}$ (il est possible de diviser puisque pour n assez grand, la norme est bien non nulle). On obtient $||P_E(P_F(x_n))|| \leqslant cos(\theta)$, de telle sorte que l'on peut faire tendre n vers $+\infty$ et obtenir l'inégalité voulue.

Exercice 2. 1. On considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec pour tout n, $f_n \in V$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geqslant N \Rightarrow ||f_n - f_m||_V \leqslant \varepsilon.$$

En revenant à la définition de la norme dans V et en utilisant l'égalité de Parseval, on en déduit notamment que

$$n, m \geqslant N \Rightarrow ||f_n - f_m||_H \leqslant \varepsilon,$$

on a donc déjà convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain $f \in L^2(0,1)$, par complétude de $L^2(0,1)$. Montrons maintenant que les $a_k(f)$ vérifient $\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k(f)|^2 < \infty$. On remarque que si $n \geqslant N$ et par inégalité triangulaire,

$$||f_n||_V \leqslant ||f_N||_V + \varepsilon.$$

On se fixe un certain $M \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{M} k^2|a_k(f_n)|^2 \leqslant ||f_n||_V^2 \leqslant \left(||f_N||_V + \varepsilon\right)^2.$$

De plus, chaque $a_k(f_n)$ converge vers $a_k(f)$ en utilisant la continuité du produit scalaire et la convergence en norme L^2 de f_n vers f. Ainsi, on peut faire $n \to \infty$ dans ce qui précède et en déduire

$$\sum_{k=1}^{M} k^2|a_k(f)|^2 \leqslant \left(||f_N||_V + \varepsilon\right)^2.$$

Ainsi, la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k(f)|^2$ est bornée et à termes positifs, elle converge donc. A ce stade, on a montré que $f_n \to f$ dans H et que $f \in V$. Reste à montrer que $f_n \to f$ mais ceci est une conséquence du fait que pour $n, m \geqslant N$, on ait

$$||f_n - f_m||_V \leqslant \varepsilon$$

puisqu'il suffit de faire $m \to \infty$ dans cette égalité (on a clairement que $k^2 a_k(f_m) \to k^2 a_k(f)$ et on peut alors utiliser les théorèmes d'inversion de limite et de série).

2. Chaque terme $a_k(f)\sin(k\pi x)$ est continu en x sur $[0,1]$ et majoré par $|a_k(f)|$, et cette série est convergente. En effet, puisque $\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k(f)|^2 < \infty$, on peut écrire

$$|a_k(f)| = \frac{|ka_k(f)|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(k^2 a_k(f)^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Chacune des séries de droite converge bien. (on peut aussi utiliser Cauchy-Schwartz). On a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\sin(k\pi x)$ qui est bien continue. On peut de plus intervertir les limites et dire que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\sin(0) = 0,$$

de même en $x = 1$ puisque $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc bien le résultat souhaité.

3. On considère un certain $M \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi \in C_0^{\infty}(0,1)$. En utilisant l'IPP classique pour les fonctions continues et en prenant en compte que chacun des termes s'annule au bord, on a déjà

$$\sqrt{2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{M} a_k(f)\sin(k\pi x)\right)\varphi'(x)dx = -\sqrt{2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{M} k\pi a_k(f)\cos(k\pi x)\right)\varphi(x)dx.$$

Il reste à vérifier que l'on peut faire $M \to \infty$ dans chacune de ces égalités, mais c'est évident puisque par exemple pour le terme de gauche et en utilisant l'identité de Parseval,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left|\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{M} a_k(f)\sin(k\pi x)\right)\varphi'(x)dx - \int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx\right| &\leqslant \sqrt{2}||\sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(f)\sin(k\pi\cdot)||_{L^2(0,1)}||\varphi'||_{L^2(0,1)} \\ &\leqslant ||\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k(f)|^2||^{\frac{1}{2}}||\varphi'||_{L^2(0,1)},\end{aligned}$$

de telle sorte que la différence tend vers 0 quand $M \to \infty$ puisqu'on a fait apparaître le reste d'une série convergente (idem pour le terme de droite). On en déduit bien que $f \in H^1(0,1)$ et sa dérivée faible est donnée presque partout par

$$f'(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\pi a_k(f)\cos(k\pi x).$$

4. On suit l'indication. On fait une IPP dans $H^1(0,1)$ et on prend en compte que f est nulle au bord. On en déduit que

$$\langle f, \sin(k\pi\cdot)\rangle = \frac{1}{k\pi}\langle f', \cos(k\pi\cdot)\rangle.$$

Or le terme de gauche vaut exactement $\frac{a_k(f)}{\sqrt{2}}$, autrement dit, on a

$$(ka_k(f))^2 = \frac{2}{\pi^2}\left(\langle f', \cos(k\pi\cdot)\rangle\right)^2,$$

et cette série est donc bien convergente puisque $f' \in L^2(0,1)$ et $\sqrt{2}\cos(k\pi\cdot)$ est une base hilbertienne (le terme de droite est à un facteur constant près le coefficient numéro k de la décomposition de f dans cette base hilbertienne et la série des coefficients est dans $l^2(\mathbb{N}^*)$). On a donc bien que $f \in V$.

Exercice 3. 1. L'injection de Sobolev nous dit qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(0,1)$, on ait

$$||u||_{C^0([0,1])} \leqslant C||u||_{H^1(0,1)}.$$

Soit $U_n \in \mathcal{V}$ telle que $U_n \to U$ avec $U \in \mathcal{H}$. Pour que $U \in \mathcal{V}$, il faut et il suffit de démontrer que $u_1(0) = 1$ et que $u_1(1) = u_2(1)$. Avec des notations évidentes, on a $u_{1,n} \to u_1$ dans $H^1(0,1)$ et $u_{2,n} \to u_2$ dans $H^1(0,1)$. En utliisant l'inclusion de Sobolev précédente, on en déduit que $u_{i,n}$ converge uniformément vers u_i pour $i = 1, 2$. Ainsi on a aussi convergence ponctuelle. On en déduit donc que $u_{1,n}(0) \to u_1(0) = 0$ et que pour $i = 1, 2$, on a $u_{i,n}(1) \to u_i(1)$. Comme $u_{1,n}(1) = u_{2,n}(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par unicité de la limite on en déduit $u_1(1) = u_2(1)$. Pour vérifier que la fonction donnée est une norme, le seul point non trivial est le caractère défini. On prend $U \in \mathcal{V}$ tel que $\sqrt{||u_1'||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2'||^2_{L^2(0,1)}}=0$. On a alors $u_1' = 0$ et $u_2' = 0$, de telle sorte que u_1 et u_2 sont constantes. Puisque $u_1(0) = 0$, on en déduit que $u_1 = 0$, et comme $u_2(1) = u_1(1) = 0$ aussi, on a bien $u_2 = 0$.

2. On a déjà l'inégalité triviale provenant de la définition des normes

$$||U||_{\mathcal{V}} \leqslant ||U||_{\mathcal{H}}.$$

Inversement, on applique la formule du représentant continu pour u_1 en $x \in (0,1)$ et 0, on obtient $u_1(x) = \int_0^x u_1'(t)dt$. On en déduit en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|u_1(x)|^2 \leqslant \left(\int_0^1 |u_1'(t)dt|\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 1^2\right) \int_0^1 |u_1'(t)|^2 dt. \tag{1}$$

En intégrant par rapport à x, on obtient déjà

$$||u_1||^2_{L^2(0,1)} \leqslant ||u_1||^2_{L^2(0,1)} \leqslant ||U||_{\mathcal{V}}.$$

Intéressons-nous maintenant à ce qu'il se passe pour u_2. On applique maintenant la formule du représentant continu à u_2, en $x \in (0,1)$ et 1. On obtient

$$u_2(x) = u_2(1) + \int_1^x u_2'(t)dt.$$

Or $u_2(1) = u_1(1)$ et l'inégalité (1) nous donne que

$$|u_2(1)|^2 \leqslant \int_0^1 |u_1'(t)|^2 dt.$$

Ainsi, par des calculs similaires à précédemment et en utilisant l'inégalité bien connue $((a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,

$$||u_2||^2_{L^2(0,1)} \leqslant 2\left(|u_2(1)|^2 + \left(\int_0^1 |u_2'(t)|dt\right)^2\right) \leqslant 2\left(\int_0^1 |u_1'(t)|^2 dt + \int_0^1 |u_2'(t)|^2 dt\right) \leqslant 2\left(||u_1'||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2'||^2_{L^2(0,1)}\right).$$

Ainsi, on a obtenu

$$||u_1||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2||^2_{L^2(0,1)} \leqslant 3||U||^2_V,$$

de telle sorte qu'en revenant à la définition de la norme dans $\mathcal{H}$, on ait

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leqslant 4||U||^2_V.$$

L'équivalence des normes est montré. Du coup, comme $(\mathcal{V}, ||\cdot||_{\mathcal{H}})$ est lui-même un espace de Hilbert comme sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il en est de même pour $(\mathcal{V}, ||\cdot||_{\mathcal{V}})$ par équivalence des normes.

3. On réécrit le problème sous la forme $a(U,V) = l(V)$, avec

$$a(U,V) = \int_0^1 (u_1'v_1' + qu_1v_1) + \int_0^1 (u_2'v_2' + qu_2v_2), \quad l(V) = \int_0^1 (f(v_1 - v_2)) - v_2(0).$$

a est trivialement une forme bilinéaire. Elle est continue pour la norme dans $\mathcal{V}$ car on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de type Poincaré démontrée précédemment que

$|a(U,V)|$
$\leqslant ||u_1'||_{L^2(0,1)}||v_1'||_{L^2(0,1)} + ||q||_{L^\infty(0,1)}||u_1||_{L^2(0,1)}||v_1||_{L^2(0,1)} + ||u_2'||_{L^2(0,1)}||v_2'||_{L^2(0,1)} + ||q||_{L^\infty(0,1)}||u_2||_{L^2(0,1)}||v_2||_{L^2(0,1)}$
$\leqslant ||U||_{\mathcal{V}}||V||_{\mathcal{V}} + 4||q||_{L^\infty(0,1)}||U||_{\mathcal{V}}||V||_{\mathcal{V}} + ||U||_{\mathcal{V}}||V||_{\mathcal{V}} + 4||q||_{L^\infty(0,1)}||U||_{\mathcal{V}}||V||_{\mathcal{V}}$
$\leqslant \left(2 + 8||q||_{L^\infty(0,1)}\right)||U||_{\mathcal{V}}||V||_{\mathcal{V}}.$

elle est coercive puisque de la positivité de q, on déduit

$$a(U,U) = \int_0^1 \left(u_1'^2 + qu_1^2\right) + \int_0^1 \left(u_2'^2 + qu_2^2\right) \geqslant \int_0^1 u_1'^2 + \int_0^1 u_2'^2 = ||U||^2_{\mathcal{V}}.$$

de même, l est trivialement une forme linéaire. Elle est continue pour la norme dans $\mathcal{V}$ encore une fois par l'inégalité de Poincaré précédente et l'injection de Sobolev car

$$|l(V)| \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}\left(||v_1||_{L^2(0,1)} + ||v_2||_{L^2(0,1)}\right) + ||v_1||_{L^\infty(0,1)} \leqslant 4||f||_{L^2(0,1)}||V||_{\mathcal{V}} + C||v_1||_{H^1(0,1)} \leqslant \left(4||f||_{L^2(0,1)} + 2C\right)||V||_{\mathcal{V}}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité de $U \in \mathcal{V}$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$, on ait $a(U,V) = l(V)$, ce qui répond à la question.

4. On prend V de la forme $(v_1, 0)$, avec $v_1 \in C_0^\infty(0,1)$ de telle sorte que l'on est bien dans $\mathcal{V}$ (les conditions au bord sont vérifiées). On obtient
$$\int_0^1 u_1'\varphi' = \int_0^1 (f - qu_1)\varphi.$$
On a bien $f - qu_1 \in L^2(0,1)$ puisque $q \in L^\infty(0,1)$. Ainsi, par définition de la dérivée faible, on a bien $u_1' \in H^1(0,1)$ et $u_1'' = qu_1 - f$, ce qui donne l'équation demandée. De plus, par définition de l'espace $\mathcal{V}$, on a bien $u_1(0) = 0$. On ne peut pas dire que $u_1'(1) = 0$ (d'ailleurs ce n'est pas forcément le cas). En effet, si l'on cherche à tester (Var) avec $V = (v_1, 0)$ et $v_1 \in \mathcal{V}$, alors nécessairement $v_1(1) = 0$ par définition de $\mathcal{V}$, et donc une IPP ne permettra jamais de retrouver une condition au bord sur u_1' en 1 puisque le terme correspondant dans l'IPP s'annule.

5. C'est similaire à la question précédente. On obtient en testant sur $(0, \varphi)$ avec $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ que
$$\int_0^1 u_2'\varphi' = \int_0^1 (-f - qu_2)\varphi.$$
On a bien $-f - qu_2 \in L^2(0,1)$ puisque $q \in L^\infty(0,1)$. Ainsi, par définition de la dérivée faible, on a bien $u_2' \in H^1(0,1)$ et $u_2'' = qu_2 + f$, ce qui donne l'équation demandée. Maintenant, on teste (Var) avec $V = (0, 1-x)$. Une telle fonction est bien dans $\mathcal{V}$ (car 0 et $1-x$ sont dans $H^1(0,1)$ et que les conditions au bord sont vérifiées). On obtient
$$\int_0^1 u_2'(x)dx = \int_0^1 (-f(x) - q(x)u_2(x))(1-x)dx - 1.$$
On fait une IPP dans $H^1(0,1)$ à gauche. On obtient
$$[u_2'(x)(1-x)]_0^1 dt - \int_0^1 u_2''(x)(1-x)dt = \int_0^1 (-f(x) - q(x)u_2(x))(1-x)dx - 1.$$
En prenant en compte l'équation vérifiée par u_2 et le fait que $1-t$ s'annule en $t = 1$, on obtient $-u_2'(0) = -1$, ce qui était le résultat voulu.

6. On teste maintenant (Var) avec une fonction V bien choisie qui ne s'annule pas en $x = 1$ mais qui s'annule en 0, par exemple $V = (x, x)$. Une telle fonction est bien dans $H^1(0,1)$ et dans $\mathcal{V}$ puisque les conditions au bord sont vérifiées. On obtient
$$\int_0^1 (u_1'(x) + q(x)xu_1(x)) + \int_0^1 (u_2'(x) + q(x)xu_2(x)dx) = \int_0^1 2xf(x)dx.$$
On fait deux IPP sur u_1' et u_2' et on utilise les équations vérifiées par u_1 et u_2 respectivement. On obtient
$$[u_1'(x)x]_0^1 + [u_2'(x)x]_0^1 = 0,$$
autrement dit $u_1'(1) + u_2'(1) = 0$.