Corrigé Partiel du 29 octobre 2018

Vrai ou faux? (3 points)

1. VRAI: il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^n$ aux suites $(1,\ldots,1)$ et $(x_1,\ldots,x_n)$.
2. FAUX: une projection orthogonale n'est jamais (sauf si $C=H$) injective. En effet, si $x\notin C$, sa projection orthogonale $P_C(x)$ est par définition dans C, donc notamment $P_C(P_C(x))=P_C(x)$, mais puisque $x\notin C$, on a bien $P_C(x)\neq x$, ce qui nie l'injectivité. En fait, on pourrait même démontrer que dans ce cas, il existe une infinité de y tels que $P_C(y)=P_C(x)$ (faire un dessin pour s'en convaincre).
3. VRAI: tout élément x de H sous la forme $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k=x_1e_1+y$ avec $y\in\overline{Vect(\{e_k\}_{k\geqslant 2})}$. De plus, la somme est bien orthogonale (et donc directe) car e_1 est orthogonal à tous les éléments de $\overline{Vect(\{e_k\}_{k\geqslant 2})}$.
4. FAUX: il est impossible d'écrire e_1 comme une série des e_k avec $k\geqslant 2$. En effet, par le point précédent e_1 est orthogonal à $\overline{Vect(\{e_k\}_{k\geqslant 2})}$.
5. VRAI. Il suffit d'appliquer la formule du cours sur la projection sur un espace vectoriel de dimension finie , une base hilbertienne de $Vect(a)$ est $e_1=a/||a||$, de telle sorte que la projection orthogonale est donnée par $\langle x,e_1\rangle e_1=\frac{\langle x,a\rangle}{||a||^2}a$.
6. VRAI: l'orthogonal de F est par définition l'ensemble des $f\in L^2(]0,1[)$ tels que pour tout $g\in Vect(1)$, $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$. Comme tout $g\in Vect(1)$ s'écrit sous la forme α avec $\alpha\in\mathbb{R}$, cela revient à dire que l'on a $\int_0^1 f(x)dx=0$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 1 (5 points)**.**

1. On raisonne par double inclusion. Soit $x\in(E+F)^{\perp}$. Alors par définition, on a, pour tout $e\in E$ et $f\in F$, $\langle x,e+f\rangle=0$. En prenant $f=0$ on obtient $\langle x,e\rangle=0$ pour tout $e\in E$, et en prenant $e=0$ on obtient $\langle x,f\rangle=0$, pour tout $f\in F$. Donc $x\in E^{\perp}$ et $x\in F^{\perp}$, autrement dit $x\in E^{\perp}\cap F^{\perp}$. Inversement, si $x\in E^{\perp}\cap F^{\perp}$, alors $\langle x,e\rangle=0$ pour tout $e\in E$ et $\langle x,f\rangle=0$, pour tout $f\in F$, donc pour tout $e\in E$ et $f\in F$, $\langle x,e+f\rangle=0$, i.e. $x\in(E+F)^{\perp}$.
2. On applique la première question en replaçant E par $E^{\perp}$ et F par $F^{\perp}$, qui sont toujours des sev fermés de H. On obtient $(E^{\perp}+F^{\perp})^{\perp}=E^{\perp\perp}\cap F^{\perp\perp}=\overline{E}\cap\overline{F}=E\cap F$. En passant à l'orthogonal, on obtient bien $(E\cap F)^{\perp}=\overline{E^{\perp}+F^{\perp}}$.
3. Soit $x\in\overline{E+F}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E+F$ tels que $x_n\to x$. pour $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire $x_n=y_n+z_n$ avec $y_n\in E$ et $z_n\in F$. On pose P_E (resp. P_F) la projection orthogonale sur E (resp. F). Alors par linéarité, $P_E(x_n)=P_E(y_n)+P_E(z_n)=y_n+0$, puisque $y_n\in E$ et z_n est orthogonal à E. De même, $P_F(x_n)=z_n$. Or les applications P_E et P_F sont lipschitiziennes dont continues, donc $P_E(x_n)\to P_E(x)$ et $P_F(x_n)\to P_F(x)$. Or $x_n=y_n+z_n$ donc $x_n\to P_E(x)+P_F(x)\in E+F$ par définition de la projection orthogonale.
4. $\Leftarrow$: on suppose E et F orthogonaux. Soit P_{E+F} la projection orthogonale sur $E+F$ qui est bien un (sous-espace vectoriel) fermé par la question précédente. Soit $x\in H$. Alors $x=y+e+f$, avec $y\in(E+F)^{\perp}=E^{\perp}\cap F^{\perp}$ par la première question, $e\in E$ et $f\in F$. On a alors $P_{E+F}(x)=e+f$. De plus, $P_E(x)=e$ (car x et f sont orthogonaux à E) et $P_F(x)=f$ (car x et e sont orthogonaux à F). Donc $P_{E+F}(x)=P_E(x)+P_F(x)$, et P_E+P_F est la projection orthogonale sur $E+F$.

   $\Rightarrow$: le sens direct est plus difficile. Inversement, supposons que P_E+P_F est une projection orthogonale. On suppose que E et F sont non orthogonaux. Alors il existe un $f\in F$ tel que $P_E(f)\neq 0$. En effet, sinon, on aurait que pour tout $f\in F$, $P_E(f)=0$, ce qui signifierait que pour tout $f\in F$, f est orthogonal à E, i.e. que E et F sont orthogonaux. On a alors $||f||^2=||P_E(f)||^2+||f-P_E(f)||^2$, mais aussi $||f||^2=$

$||P_E(f)+P_F(f)||^2+||f-P_E(f)-P_F(f)||^2$. Compte tenu du fait que $P_E(f)+P_F(f)=P_E(f)+f$, on obtient $||f||^2=||P_E(f)+f||^2+||P_E(f)||^2$. On en déduit que $||f-P_E(f)||^2=||P_E(f)+f||^2$, ce qui donne en développant que $\langle f,P_E(f)\rangle=0$. De l'égalité $\langle f-P_E(f),P_E(f)\rangle=0$, on tire $\langle f,P_E(f)\rangle=||P_E(f)||^2=0$, ce qui aboutit à une contradiction.

Exercice 2 (3 points)**.** On pose $H=L^2(]0,2\pi[)$, muni du produit scalaire usuel. C'est un espace de Hilbert. On pose $F=Vect(1,x)$. C'est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie 2, il est donc fermé. Le problème peut donc se réécrire sous la forme $\int_{f\in F}||sin-f||_H^2$, autrement dit on recherche la distance au carré de la fonction sin au sous-espace vectoriel F. Par le cours, on sait que ce minimum est atteint en une unique fonction de F, qui est justement la projection orthogonale du sinus sur le sous-espace F, que l'on notera $P_F(\sin)$. Calculons cette projection. Pour ce faire, on utilise la formule du cours

$$P_F(\sin)=\langle\sin,e_1\rangle e_1+\langle\sin,e_2\rangle e_2,$$

où e_1 et e_2 forme une base orthonormale de F. Pour e_1, il suffit de normaliser la fonction 1, dont la norme est $\sqrt{2\pi}$. On pose donc

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour trouver e_2, on utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On pose donc un vecteur intérmédiaire

$$v_2=x-\frac{\int_0^{2\pi}x}{2\pi}=x-\frac{4\pi^2}{4\pi}=x-\pi,$$

que l'on renormalise. Sa norme au carré vaut

$$||v_2||^2=\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}y^2dx=\frac{2\pi^3}{3}.$$

On pose donc

$$e_2=\frac{\sqrt{3}(x-\pi)}{\sqrt{2\pi^3}}.$$

On remarque que le sinus est d'intégrale nulle. Ainsi, sa projection sur e_1 (qui est une fonction constante) vaut 0. On a donc aussi seulement besoin de garder "la partie en x" du produit scalaire avec e_2, et on en déduit en utilisant une intégration par parties que

$$P_F(\sin)=\langle\sin,e_2\rangle e_2=\left(\frac{3}{2\pi^3}\int_0^{2\pi}x\sin(x)dx\right)(x-\pi)=\frac{3}{2\pi^3}(-2\pi(x-\pi))=\frac{3(\pi-x)}{\pi^2}.$$

L'infimum est donc atteint en cette unique fonction $P_F(\sin)$ et la valeur du minimum est (après quelques calculs et en utilisant la formule donnée)

$$\int_0^{2\pi}\left(\sin(x)-\frac{3(\pi-x)}{\pi^2}\right)^2dx=\pi-\frac{6}{\pi}.$$

Exercice 3. 1. F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert. C'est donc lui-même un espace de Hilbert. On en déduit donc en appliquant le théorème de représentation de Riesz qu'il existe un unique $x\in F$ tel que pour tout $y\in F$, on ait $f(y)=\langle x,y\rangle$. Il est alors très tentant de prolonger f en posant $\tilde{f}(z)=\langle x,z\rangle$ pour $z\in H$. C'est bien un prolongement car $\tilde{f}$ coïncide avec f sur F, qui plus est linéaire par linéarité du produit scalaire par rapport à une variable. De plus, F est encore une forme linéaire continue par l'inégalité de Cauchy-Schwartz: pour tout $z\in H$, on a

$$|\tilde{f}(z)|\leqslant||x||.||z||.$$

De plus, la norme d'opérateur de $\tilde{f}$ est inférieur à $||x||$. En fait, il est même égal car $\frac{|\tilde{f}(x)|}{||x||}=||x||$. Il reste à démontrer que $|||f|||=||x||$, mais c'est encore une fois une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur F, et du fait que $\frac{|f(x)|}{||x||}=||x||$ avec $x\in F$.

2. Il est très tentant de prolonger f en la posant égale à 0 sur l'orthogonal. Ainsi, pour tout $z \in H$ que l'on décompose de manière unique comme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in F^\perp$, on pose $\overline{f}(z) = f(x)$. Il est clair que $\overline{f}$ reste une forme linéaire, et qu'elle prolonge f. Elle est de plus continue puisque par Pythagore,

$$\frac{|\overline{f}(z)|}{||z||} = \frac{|f(x)|}{||z||} \leqslant \frac{|||f|||.||x||}{\sqrt{||x||^2 + ||y||^2}} \leqslant |||f|||.$$

On déduit de plus que $|||\overline{f}||| \leqslant |||f|||$, mais cette inégalité est une égalité puisqu'il existe une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$de F (et donc de H) de norme 1 tels que $|f(x_n)| \to |||f|||$, par définition de la norme d'opérateur $|||f|||$ sur F.

3. Cette question est assez difficile. On suit l'indication. On considère $(g(x + \lambda z))^2$, pour $x \in F$ avec $||x|| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in F^\perp$ tel que $g(z) > 0$ et $||z|| = 1$. On utilise la linéarité et on développe, on obtient alors

$$(g(x + \lambda z))^2 = (g(x))^2 + \lambda^2(g(z))^2 + 2\lambda g(x)g(z) = (f(x))^2 + \lambda^2(g(z))^2 + 2\lambda f(x)g(z).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un certain $x \in F$ vérifiant $||x|| = 1$ tel que $|f(x)| > |||f||| - \varepsilon$. De plus, quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer que $f(x) \geqslant 0$ et donc supposer que $f(x) > |||f||| - \varepsilon$. On obtient donc, en se restreignant à $\lambda \geqslant 0$, que

$$(g(x + \lambda z))^2 > (|||f||| - \varepsilon)^2 + \lambda^2(g(z))^2 + 2\lambda(|||f||| - \varepsilon)g(z).$$

On se demande si on peut trouver $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$(|||f||| - \varepsilon)^2 + \lambda^2(g(z))^2 + 2\lambda(|||f||| - \varepsilon)g(z) > |||f||^2||x + \lambda z||^2 = |||f||^2(1 + \lambda^2),$$

ce qui permettra de conclure que $|||g||| > |||f|||$. Cette dernière inégalité est équivalente à

$$(1)\ \lambda^2((g(z))^2 - |||f|||^2) + 2\lambda(|||f||| - \varepsilon)g(z) + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon|||f|||) > 0.$$

Si l'on arrive à trouver $\lambda \geqslant 0$ indépendant de $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lambda^2((g(z))^2 - |||f|||^2) + 2\lambda(|||f|||)g(z) > 0,$$

alors c'est gagné: il suffira de prendre $\varepsilon > 0$ assez petit de telle sorte que l'inégalité stricte (1) soit toujours vérifiée. En prenant $\lambda > 0$, cette inégalité est équivalente à

$$\lambda((g(z))^2 - |||f|||^2) + 2(|||f|||)g(z) > 0$$

pour un certain $\lambda > 0$. C'est évidemment toujours possible, quitte à prendre $\lambda > 0$ suffisamment petit, puisque l'on a $|||f|||g(z) > 0$ dès que $f \neq 0$ (mais le cas $f = 0$ est trivial puisqu'on a alors $|||g||| > 0 = |||f||L.$). Remarquons que ce choix de λ ne dépend que de $|||f|||$ et de $g(z)$, et ne dépend donc pas de $\varepsilon > 0$, de telle sorte que notre raisonnement est bien valide.

4. Le prolongement construit à la question 2 est forcément unique. En effet, on ne peut pas poser autre chose que $\overline{f} = 0$ sur $F^\perp$ sous peine d'augmenter la norme d'opérateur par la question précédente.

5. Soient n et m deux entiers. On a
$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant |||f|||.||x_n - x_m||.$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy, de telle sorte qu'automatiquement la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi (il suffit de revenir à la définition d'une suite de Cauchy). On note y sa limite. En faisant $m \to \infty$ dans la question précédente, on en déduit
$$|f(x_n) - y| \leqslant |||f|||.||x_n - x||.$$

6. Comme à la question précédente, on a
$$|f(z_n) - y'| \leqslant |||f|||.||z_n - x||.$$
On en déduit alors
$$|y - y'| \leqslant |y - f(x_n)| + |f(x_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - y'|.$$
Or comme $x_n \to x$ et $z_n \to x$ quand $n \to \infty$, on en déduit par les inégalités précédentes que $|f(x_n) - y| \to 0$ et $|f(z_n) - y'| \to 0$. Quant à $|f(x_n) - f(z_n)|$, il tend aussi vers 0 puisque
$$|f(x_n) - f(z_n)| \leqslant |||f|||.||x_n - z_n||| \to 0.$$
On a donc bien $|y - y'| = 0$, i.e. $y = y'$.

7. Soit $x \in \overline{F}$. On prend n'importe quelle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, et on pose $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Par les question précédentes, cette limite existe et ne dépend pas de la suite choisie, de telle sorte que $\tilde{f}$ est bien définie.

   On démontre très facilement que $\tilde{f}$ est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $x, y \in \overline{F}$. Avec des notations évidentes et par linéarité sur F,
$$f(x_n + \lambda y_n) = f(x_n) + \lambda f(y_n).$$
   Le membre de gauche converge vers $\tilde{f}(x+\lambda y)$ et celui de droite converge vers $\tilde{f}(x) + \lambda\tilde{f}(y)$, d'où la linéarité par unicité de la limite. $\tilde{f}$ reste continue, en effet on a avec les mêmes notations et en utilisant la première question,
$$|\tilde{f}(x)| \leqslant |\tilde{f}(x - x_n)| + |\tilde{f}(x_n)| \leqslant |y - f(x_n)| + |f(x_n)| \leqslant |||f|||(||x_n - x||) + |||f|||.||x_n||.$$
   En faisant $n \to \infty$, on obtient bien $|\tilde{f}(x)| \leqslant |||f|||.||x||$, de telle sorte que $\tilde{f}$ est continue de norme plus petite que $|||f|||$. Mais cette norme est en fait exactement égale à $|||f|||$ puisqu'il existe une suite d'éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F (et donc de $\overline{F}$) tels que $||x_n|| = 1$ convergeant vers $|||f|||$.