Examen du 16 janvier 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Questions de cours. (2,5 points)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in [1,\infty]$. Montrer que $W^{1,p}(I)$ muni de $||u||_{W^{1,p}(I)} = \left(||u||^p_{L^p(I)} + ||u'||^p_{L^p(I)}\right)^{\frac{1}{p}}$, qui est clairement un espace vectoriel normé, est **complet**.

Vrai ou faux? (2 points)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux (sans justification)? 0.5 point par réponse bonne, -0.5 point par réponse fausse, 0 point si non répondu. **La note globale, même négative, est déduite de l'ensemble de l'examen.**

1. On considère $H = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon_k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, où le 1 est en k-ième position. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_k \in H$ et $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de H.
2. $W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \subset W^{1,1}(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ s'annulant en 0 est dense dans $(W^{1,1}(]0,1[), ||\cdot||_{W^{1,1}(]0,1[)})$.
4. $u : x \mapsto |x| - 1 \in H^1_0(]-1,1[)$.

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels fermés de H, supposés non réduits à $\{0\}$. On appelle P_E et P_F les projecteurs orthogonaux sur E et F respectivement. On rappelle que pour $g \in \mathcal{L}_c(H)$, (l'ensemble des endomorphismes continus de H), on a

$$|||g||| = \sup_{x\neq 0} \frac{||g(x)||}{||x||} = \sup_{||x||\leqslant 1} \frac{||g(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||g(x)||.$$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in H^2$, on a $\langle P_E(x), y\rangle = \langle x, P_E(y)\rangle$ (il en est évidemment de même pour P_F).
2. Montrer que $|||P_E||| = 1$ (il en est évidemment de même pour P_F).

On appelle angle minimal entre E et F la quantité θ définie par

$$\cos(\theta) = \sup_{e\in E,\, f\in F,\, ||e||=||f||=1} \langle e, f\rangle. \tag{Cos}$$

3. Montrer que (Cos) a bien un sens et que l'on peut choisir de manière unique θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. On suppose $E\cap F \neq \{0\}$, que vaut θ? Que signifie $\theta = \frac{\pi}{2}$ en terme d'orthogonalité?
4. Montrer que $\cos(\theta) = |||P_E \circ P_F||| = |||P_F \circ P_E|||$.

Exercice 2 (5,5 points)**.** On considère l'espace de Hilbert $H = L^2((0,1),\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique. On rappelle que $\{\sqrt{2}\sin(k\pi\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\{\sqrt{2}\cos(k\pi\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont des bases hilbertiennes de H. Dorénavant, toute fonction $f \in H$ sera décomposée de manière unique comme

$$f(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\sin(k\pi x) \quad \text{p.p.}, \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}).$$

On note

$$V = \{f \in H | \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k(f)|^2 < \infty\}.$$

V est un sous-espace vectoriel de H que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g\rangle_V = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k(f) a_k(g)$.

1. Montrer que $(V, \langle , \rangle_V)$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que si $f \in V$, alors $f \in C^0([0,1])$ et $f(0) = f(1) = 0$.
3. Soit $f \in V$, montrer que $f \in H_0^1(0,1)$ et calculer sa dérivée faible f' à l'aide des $a_k(f)$.
4. Montrer que $V = H_0^1(0,1)$. *Indication: prendre $f \in H_0^1(0,1)$, regarder $\langle f, \sin(k\pi\cdot)\rangle$ et faire une IPP.*

Exercice 3 (9 points)**.** On rappelle que l'espace $H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(0,1)} = \langle u, v\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(0,1)}, (u,v) \in (H^1(0,1))^2,$$

de telle sorte que la norme associée est donnée par

$$||u||_{H^1(0,1)} = \sqrt{||u||^2_{L^2(0,1)} + ||u'||^2_{L^2(0,1)}}, u \in H^1(0,1).$$

On considère dans la suite l'espace $\mathcal{H}$ suivant: $\mathcal{H} := H^1(0,1) \times H^1(0,1)$. Un élément $U \in \mathcal{H}$ (resp. $V \in \mathcal{H}$) sera dans toute la suite toujours décomposé de manière unique en $U = (u_1, u_2)$ (resp. $(V = (v_1, v_2))$. On admet que cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle U, V\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_1, v_1\rangle_{H^1(0,1)} + \langle u_2, v_2\rangle_{H^1(0,1)} = \langle u_1, v_1\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u_1', v_1'\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u_2, v_2\rangle_{L^2(0,1)} + \langle u_2', v_2'\rangle_{L^2(0,1)},$$

de telle sorte que la norme associée est donnée par

$$||U||_{\mathcal{H}} = \sqrt{||u_1||^2_{H^1(0,1)} + ||u_2||^2_{H^1(0,1)}} = \sqrt{||u_1||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2||^2_{L^2(0,1)} + ||u_1'||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2'||^2_{L^2(0,1)}}.$$

On introduit le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ suivant de $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{H} | u_1(0) = 0, u_2(1) = u_1(1)\}.$$

Dans toute la suite, on considère $f \in L^2(0,1)$, ainsi que $q \in L^\infty(0,1)$, supposée positive p.p.

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{H}$ pour la norme définie sur $\mathcal{H}$. Montrer que la fonction suivante: $U \in \mathcal{V} \mapsto \sqrt{||u_1'||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2'||^2_{L^2(0,1)}}$ est une norme sur $\mathcal{V}$.

On pose dorénavant $||U||_{\mathcal{V}} := \sqrt{||u_1'||^2_{L^2(0,1)} + ||u_2'||^2_{L^2(0,1)}}$, et on munira dorénavant $\mathcal{V}$ de cette norme.

2. Montrer que $||\cdot||_{\mathcal{V}}$ est équivalente à la norme $||\cdot||_{\mathcal{H}}$ sur l'espace $\mathcal{V}$. *Indication: on traitera d'abord u_1, puis u_2.* $(\mathcal{V}, ||\cdot||_{\mathcal{V}})$ est-il un espace de Hilbert? Si oui, expliquer pourquoi en quelques mots.

On s'intéresse dorénavant au problème variationnel suivant: trouver $U \in \mathcal{V}$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$,

$$\int_0^1 (u_1'v_1' + qu_1v_1) + \int_0^1 (u_2'v_2' + qu_2v_2) = \int_0^1 f.(v_1 - v_2) - v_2(0). \tag{Var}$$

3. Montrer qu'il existe un unique couple $U \in \mathcal{V}$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$, on ait (Var).
4. En choisissant (après justification) d'abord V de la forme $(\varphi, 0)$ avec $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, montrer que $u_1' \in H^1(0,1)$, puis que u_1 est solution de l'équation $-u_1'' + qu_1 = f$ p.p., et enfin que $u_1(0) = 0$. Peut-on dire que $u_1'(1) = 0$?
5. Montrer que $u_2' \in H^1(0,1)$, puis que u_2 est solution de l'équation $-u_2'' + qu_2 = -f$ p.p., et enfin que $u_2'(0) = 1$.
6. En revenant à (Var), montrer que $u_1'(1) = -u_2'(1)$.