Partiel du 29 octobre 2018

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Questions de cours. (2 points)

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert complexe. Soit F un sous-espace vectoriel fermé. Démontrer que $F \bigoplus F^\perp = H$, $Id = \Pi_F + \Pi_{F^\perp}$ (où Π_E désigne la projection orthogonale sur le convexe E), et pour tout $x \in H$, $||x||^2 = ||\Pi_F(x)||^2 + ||x - \Pi_F(x)||^2$.

Vrai ou faux? (3 points)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux (sans justification)? 0.5 point par réponse bonne, -0.5 point par réponse fausse, 0 point si non répondu. **La note globale, même négative, est déduite de l'ensemble du partiel.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots x_n$ des nombres réels. Alors $x_1 + \dots + x_n \leqslant \sqrt{n}(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.
2. Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe et C un ensemble convexe fermé non vide de H, supposé distinct de H. Alors la projection orthogonale sur C est injective.
3. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel ou complexe et séparable, et $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H. Alors
$$H = Vect(e_1) \bigoplus\nolimits_\perp \overline{Vect(\{e_k\}_{k \geqslant 2})}.$$
4. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel ou complexe et séparable, et $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H. Alors $\{e_k\}_{k \geqslant 2}$ est encore une base hilbertienne de H.
5. Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel et $a \in H$ un vecteur de H, supposé non nul. La projection orthogonale sur $Vect(a)$ est l'application $x \mapsto \frac{\langle x, a \rangle}{||a||^2} a$.
6. On pose $H = L^2(]0,1[, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On pose $F = Vect(1)$ (où 1 est la fonction constante égale à 1 sur $]0,1[$). Alors $F^\perp$ est l'ensemble des fonctions de H de moyenne nulle.

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert complexe, E et F deux sous-espaces vectoriels fermés de H.

1. Montrer que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.
2. En déduire que $(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

Dans toute la suite, on pose P_E (resp. P_F) la projection orthogonale sur E (resp. F).

3. On suppose que E et F sont orthogonaux. Montrer que $E + F$ est fermé.
4. Montrer que $P_E + P_F$ est une projection orthogonale si et seulement si E et F sont orthogonaux.
Indication: commencer par le sens réciproque, plus simple. Pour le sens direct, on pourra raisonner par l'absurde et considérer (en justifiant) un $f \in F$ tel que $P_E(f) \neq 0$, puis on montrera que $\langle f, P_E(f) \rangle = 0$ et on conclura.

Exercice 2 (4 points)**.** En utilisant des méthodes hilbertiennes, calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (sin(x) - a - bx)^2 dx.$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte? Si oui, pour quelle(s) fonction(s)?

Indication: pour simplifier les calculs, dans le ***calcul final (et pas avant)*** *de l'infimum, on utilisera sans démonstration la formule*

$$\int_0^{2\pi} (sin(x) - a - bx)^2 dx = \pi + 4b\pi + 2a^2\pi + 4ab\pi^2 + \frac{8b^2\pi^3}{3}.$$

Exercice 3 (Deux preuves du théorème de Hahn-Banach analytique. 6 points)**.** Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit F un sous-espace vectoriel **fermé** de H. Soit $f : F \mapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur F, dont on notera $|||f|||$ la norme d'opérateur. On rappelle que $|||f|||$est définie comme suit:

$$|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||\leqslant 1} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)|.$$

1. 1ère preuve: Montrer qu'il existe un unique $x \in F$ tel que pour tout $y \in F$, on ait $f(y) = \langle x, y\rangle$. En déduire qu'il existe un prolongement de f sur H en une forme linéaire continue de norme $|||f|||$.
2. 2ème preuve: on décompose H en $H = F \bigoplus F^{\perp}$. En utilisant cette décomposition, montrer qu'il existe un prolongement de f sur H en une forme linéaire continue de norme $|||f|||$.
3. On considère g une forme linéaire continue sur H telle que $g_{|F} = f$. On suppose que $g_{|F^{\perp}} \not\equiv 0$. Montrer que $|||g||| > |||f|||$.

   Indication: on pourra s'intéresser à $(g(x + \lambda z))^2$, *pour* $x \in F$ *avec* $||x|| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $z \in F^{\perp}$ *tel que* $g(z) > 0$ *et* $||z|| = 1$, *et utiliser la définition de* $|||f|||$.
4. En déduire qu'il existe un *unique* prolongement de f sur H en une forme linéaire continue de norme $|||f|||$.

Questions bonus (3 points): On ne suppose plus F fermé, et on souhaite démontrer que f peut se prolonger de manière unique en une forme linéaire continue sur $\overline{F}$, qui est de plus de norme $|||f|||$ (de telle sorte que par les questions précédentes, elle se prolonge ensuite de manière unique sur H en une forme linéaire continue de norme $|||f|||$).

5. Soit $x \in F$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F convergeant vers x. Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge vers un certain $y \in \mathbb{R}$, et qu'on a l'inégalité suivante, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f(x_n) - y| \leqslant |||f|||.||x_n - x||$.
6. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de $\tilde{F}$ convergeant vers x. On note y' la limite de $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $y' = y$.

   Indication: on pourra utiliser deux inégalités triangulaires bien choisies sur $|y - y'|$.
7. Déduire des deux questions précédentes que f peut se prolonger de manière unique en une forme linéaire continue sur $\overline{F}$, qui est de plus de norme $|||f|||$.