

TD 1: Espaces de Hilbert et applications

Généralités.

Exercice 1 (Autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe.

1. Soient u et v deux vecteurs de H , supposés non nuls. En utilisant uniquement le fait que $\langle w, w \rangle \geq 0$ avec $w \in H$ bien choisi, montrer l'inégalité $|\langle u, v \rangle| \leq \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Indication: on pourra introduire θ un argument de $\langle u, v \rangle$.

Qu'obtient-on si u et v sont supposés de norme 1?

2. En utilisant la question précédente, redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.

Exercice 2 (Identité du parallélogramme généralisée). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in H^n$. Montrer que l'on a

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \|\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n\|^2.$$

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Démontrer que c'est un produit scalaire.
2. Trouver une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers \exp sur $[0, 1]$.
3. En déduire $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \exp$ pour la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Que peut-on en déduire sur $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$?

Exercice 4 (Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan). Soit E un espace de Banach réel muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant l'égalité du parallélogramme:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall (x, y) \in E^2.$$

On pose

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \forall (x, y) \in E^2.$$

On se propose de vérifier que cette expression est un produit scalaire vérifiant de plus $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

1. Vérifier que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$, et $\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle$, $\forall (x, y) \in E^2$.
2. Montrer que $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall (x, y, z) \in E^3$.
3. Montrer que $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\forall (\lambda, x, y) \in (\mathbb{R} \times E^2)$. On traitera d'abord le cas $\lambda \in \mathbb{N}$ puis $\lambda \in \mathbb{Z}$ puis $\lambda \in \mathbb{Q}$.
4. Conclusion.

Exercice 5 (Complexification d'un espace préhilbertien réel). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On considère l'espace vectoriel produit $H^{\mathbb{C}} := H \times H$, où l'on pose par définition, pour $(x, y) \in H \times H$, $i(x, y) := (-y, x)$.

1. Trouver une addition et une loi de multiplication externe qui permettent de munir $H^{\mathbb{C}}$ d'une structure d'espace vectoriel complexe. Démontrer que la restriction de cette structure aux réels coïncide avec la structure d'espace vectoriel produit sur $H \times H$.

- On identifie H à $H \times \{0\}$. Identifier iH à un sous-espace vectoriel réel de $H^{\mathbb{C}}$. Montrer qu'en tant qu'espace vectoriel réel, $H^{\mathbb{C}}$ est la somme directe de H et iH .
- On considère $(z_1, z_2) \in H^{\mathbb{C}} \times H^{\mathbb{C}}$, que l'on décompose de manière unique sous la forme $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. On pose alors

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{H^{\mathbb{C}}} := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle + i(\langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle).$$

Montrer que c'est l'unique produit scalaire hermitien qui prolonge le produit scalaire sur H .

L'espace $H^{\mathbb{C}}$ est appelé le *complexifié* de H .

Exercice 6 (Inégalité de Cramér-Rao). On considère Θ un intervalle de \mathbb{R} . On considère une famille $\{p(k, \theta)\}_{k \in \mathbb{N}^*, \theta \in \Theta} \in \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tout $\theta \in \Theta$, $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(k, \theta) = 1$. On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\theta \in \Theta$, $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} g(k)p(k, \theta) = \theta$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\theta \mapsto p(k, \theta)$ est différentiable et de plus que les deux séries $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(k, \theta) \partial_{\theta} p(k, \theta)$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} g(k, \theta) \partial_{\theta} p(k, \theta)$ convergent uniformément.

- Montrer que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (g(k) - \theta) \partial_{\theta} p(k, \theta) = 1$.
- En déduire que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (g(k) - \theta)^2 p(k, \theta) \geq I(\theta)^{-1},$$

où $I(\theta)$ est l'information de Fischer donnée par

$$I(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\partial_{\theta} p(k, \theta)}{p(k, \theta)} \right)^2 p(k, \theta).$$

- Donner une interprétation statistique de cette inégalité.

Théorème de projection sur un convexe fermé.

Exercice 7. On considère l'espace $E = (C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$, et F le sous-espace vectoriel formé des fonctions impaires dont l'intégrale est nulle sur $[0, 1]$. Soit $\varphi : t \in [-1, 1] \mapsto t$.

- Montrer que F est fermé.
- Montrer que $d(\varphi, F) \geq 1/2$.
- Existe-t-il $\psi \in F$ tel que $\|\varphi - \psi\|_{\infty} = 1/2$?
- Montrer que $d(\varphi, F) = 1/2$.

Indication: essayer "d'approcher" $t - 1/2$ par des fonctions de F .

Commenter.

Exercice 8. On considère l'espace $E = (C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ et D la droite engendrée par $x \mapsto 1 - x$. Montrer que la distance de D à la fonction $x \mapsto 1$ est atteinte en plusieurs points. Commenter.

Exercice 9. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Calculer la projection sur la boule unité fermée.

Exercice 10. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Démontrer que tout convexe fermé admet un unique élément de norme minimale.

Exercice 11. Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On note $C := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} | x_n \geq 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et calculer la projection orthogonale sur C .

Exercice 12 (Convexes emboîtés et projection, I). Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de convexes fermés bornés non vides d'un espace de Hilbert réel $H, \langle \cdot, \cdot \rangle$ tels que $C_1 \supset C_2 \dots \supset C_n \supset \dots$. On note P_i la projection sur le convexe fermé C_i .

- Pour $h \in H$, on pose $a_i = P_i(h)$. Démontrer que la suite $\|h - a_i\|_{i \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.
- Montrer que la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge. *Indication: on commencera par montrer que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, en utilisant la question précédente et la formule du parallélogramme.*

3. On pose $C_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$. En déduire que $C_\infty \neq \emptyset$.
4. Montrer que C_∞ est un convexe fermé borné. On note P_∞ la projection sur le convexe fermé C_∞ .
5. Montrer que $a_i \rightarrow P_\infty(h)$ quand $i \rightarrow \infty$.
6. Que se passe-t-il si les C_i ne sont plus forcément bornés?
7. Reprendre l'exercice en ne supposant plus les C_i bornés mais en supposant que $C_\infty \neq \emptyset$.

Exercice 13 (Une application de l'exercice précédent). Soit C un convexe fermé borné non vide d'un espace de Hilbert réel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur C . On pose $m = \inf_{x \in C} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et on considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, décroissante, convergeant vers m . On pose $C_n = \{x \in C \mid f(x) \leq a_n\}$.

1. Montrer que C_n est un convexe fermé borné non vide de H .
2. En déduire que $m \neq -\infty$ et que m est atteint. Que dire de l'ensemble des vecteurs x vérifiant $f(x) = m$?

Exercice 14 (Convexes emboîtés et projection, II). Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de convexes fermés non vides d'un espace de Hilbert réel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tels que $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots$. On pose $C_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ et on suppose cet ensemble fermé. On note P_i la projection sur le convexe fermé C_i .

1. Montrer que C_∞ est un convexe. On note P_∞ la projection sur le convexe C_∞ .
2. Pour $h \in H$, on pose $a_i = P_i(h)$. Montrer que $a_i \rightarrow P_\infty(h)$ quand $i \rightarrow \infty$. On commencera par montrer que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 15 (Théorème de Hahn-Banach, version géométrique et Hilbert). On considère C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert réel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Soit $x \in H$ tel que $x \notin C$. Démontrer qu'il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) < \alpha < f(y), \forall y \in C.$$

Indication: introduire $a = P_C(x)$ et faire un dessin.

Que ceci signifie-t-il géométriquement?

2. On suppose maintenant que C est propre (i.e. non égal à H tout entier). Pour $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit $H(f, \alpha) = \{x \in H \mid f(x) \leq \alpha\}$. On introduit aussi

$$I = \bigcap_{f \in H', \alpha \in \mathbb{R}} \{H(f, \alpha) \mid C \subset H(f, \alpha)\}.$$

Montrer que $C = I$.

Indication: montrer $C \subset I$ puis $H \setminus C \subset H \setminus I$.

Que ceci signifie-t-il géométriquement?

3. Démontrer que tout sous-espace vectoriel fermé strict s'écrit comme intersection d'hyperplans fermés.

Indication: raisonner comme à la question précédente en remarquant que pour un sous-espace vectoriel F , si $x \in F$ alors $\lambda x \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Soit \widehat{C} un autre ensemble convexe non vide, supposé compact, tel que $C \cap \widehat{C} = \emptyset$. On pose $\widetilde{C} = \widehat{C}^- = \{\widehat{c} - c \mid c \in C, \widehat{c} \in \widehat{C}\}$. Montrer que $0 \notin \widetilde{C}$, et que \widetilde{C} est un convexe fermé de H .

En déduire qu'il existe $f \in H'$ tel que

$$\sup_{x \in C} f(x) < \inf_{y \in \widehat{C}} f(y).$$

Cette propriété reste-t-elle vraie si on suppose \widehat{C} seulement fermé?

Que ceci signifie-t-il géométriquement?

Exercice 16 (Espérance conditionnelle). On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} .

1. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer qu'il existe un unique (p.p.) $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tel que pour tout $U \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$, on ait $E(XU) = E(ZU)$.

Indication: on pourra considérer $F = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ce Z est appelé *espérance de X conditionnellement à \mathcal{G}* , et noté dorénavant $E(X|\mathcal{G})$.

2. Montrer que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto E[X|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est linéaire. Montrer que $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
3. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que

$$X \leq Y \text{ p.p.} \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G}).$$

Indication: raisonner par l'absurde.

Soit maintenant $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose dans un premier temps $X \geq 0$ p.p. et on introduit $X_n = \min(X, n)$. On pose $Y_n = E(X_n|\mathcal{G})$.

4. Justifier que $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \cap L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que Y_n converge vers un certain $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Soit $U \in L^\infty(\omega, \mathcal{G}, P)$ avec $U \geq 0$ p.p., montrer que $E(XU) = E(YU)$.
5. On suppose dorénavant $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (sans hypothèse de signe). Démontrer l'existence de $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tel que pour tout $U \in L^\infty(\omega, \mathcal{G}, P)$, on ait $E(XU) = E(YU)$.
6. Démontrer que le Y de la question précédente est unique p.p. Ce Y est appelé *espérance de X conditionnellement à \mathcal{G}* , et noté dorénavant $E(X|\mathcal{G})$.

On suppose dorénavant que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Démontrer les différentes propriétés suivantes de l'espérance conditionnelle:

7. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto E[X|\mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est linéaire.
8. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que

$$X \leq Y \text{ p.p.} \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G}).$$

9. Si Z est \mathcal{G} -mesurable et essentiellement bornée, alors $\mathbb{E}[ZE[X|\mathcal{G}]] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
10. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
11. Si \mathcal{H} est une sous-tribu de \mathcal{G} , alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
12. Si Z est \mathcal{G} -mesurable et essentiellement bornée, alors $\mathbb{E}[XZ|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
13. Si X est \mathcal{G} -mesurable, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
14. Si φ est une fonction convexe telle que $\varphi(X)$ est intégrable alors $E[\varphi(X)|\mathcal{G}] \geq \varphi(E[X|\mathcal{G}])$.

Théorème de Riesz.

Exercice 17. Soit E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire hermitien usuel.

1. Montrer que l'application $\varphi : u = (u_n) \in E \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E .
2. Existe-t-il un élément $a \in E$ tel que $\varphi(u) = \langle a, u \rangle$? Que peut-on en déduire sur E ?

Exercice 18 (Théorème de Radon-Nykodym, version faible). Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable, soit μ et ν deux mesures finies sur X . On suppose que quel que soit le mesurable A , on a $\nu(A) \leq \mu(A)$.

1. Démontrer que pour toute fonction h mesurable positive, on a $\int_X h(x) d\nu(x) \leq \int_X h(x) d\mu(x)$.
2. En déduire que $L^2(\mu) \subset L^2(\nu)$ et que pour tout $g \in L^2(\mu)$ on a $\|g\|_{L^2(\nu)} \leq \|g\|_{L^2(\mu)}$.

3. Montrer que $\varphi : g \in L^2(\mu) \mapsto \int_X g(x) d\nu(x)$ est une forme linéaire continue.
4. En déduire qu'il existe une fonction f mesurable telle que ν soit la mesure de densité de f par rapport à μ , i.e. pour tout mesurable A , on a $\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$.

Exercice 19 (Universalité de la convolution). Soit f une fonction de R^N ($N \in \mathbb{N}^*$) à valeurs réelles. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $\tau_x f : y \mapsto f(y - x)$. Un opérateur T agissant sur des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$ est dit invariant par translation si $T(\tau_x f) = \tau_x(Tf)$.

On considère dorénavant $T : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ un opérateur linéaire continu et invariant par translation.

1. Montrer que $f \mapsto Tf(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)'$.
2. En écrivant que $Tf(x) = \tau_{-x}(Tf)(0)$, en déduire l'existence de $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $Tf(x) = f * g(x)$, où $*$ représente le produit de convolution.

Exercice 20 (Adjoint d'un opérateur). Soit u un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert réel ou complexe (H, \langle, \rangle) et $y \in H$.

1. Montrer qu'il existe un unique $z \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $\langle u(x), y \rangle = \langle x, z \rangle$.

On pose $u^* : y \mapsto z$ défini précédemment. u^* est appelé adjoint de u .

2. Démontrer que u^* est un opérateur linéaire continu et que $\|u^*\| \leq \|u\|$.
3. Montrer que $u^{**} = u$.
4. Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$.
5. Montrer que l'application $u \in \mathcal{L}_c(H) \mapsto u^* \in \mathcal{L}_c(H)$ est anti-linéaire, continue, bijective d'inverse continu.
6. Soit v un autre endomorphisme continu de H . Montrer que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
7. Montrer que $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2 = \|u \circ u^*\|$.
8. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$. Que vaut $\text{Ker}(u^*)^\perp$?

Exercice 21 (Calculs de quelques adjoints). 1. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. On considère $T : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que T est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

2. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On considère $S : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \dots) \mapsto (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := (0, u_0, u_1, \dots)$. Montrer que S est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

3. On considère $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$ et $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère $U : f \in H \mapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x, y) f(y) dy)$. Montrer que U est linéaire continu de H dans H et calculer son adjoint.

Orthogonalité et bases hilbertiennes.

Exercice 22. Soit E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire hermitien usuel. On considère l'application $\varphi : u = (u_n) \in E \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$, qui est une forme linéaire continue sur E .

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan fermé, et que $\text{Ker}(\varphi)^\perp = \{0\}$.
2. De manière plus générale, si (H, \langle, \rangle) est un espace préhilbertien (réel ou complexe) non complet, démontrer qu'il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à 0.

Indication: on admettra que H peut être plongé dans un espace de Hilbert $(\widehat{H}, \langle, \rangle)$, et que H est dense dans \widehat{H} .

Exercice 23. On considère $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $M = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H \mid \sum_{k=0}^n x_k = 0\}$.

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de H .
2. Trouver le supplémentaire orthogonal de M .

3. Calculer la distance de la suite $(1, 0, 0, \dots)$ à M .

Exercice 24 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux). Soit un espace de Hilbert réel (H, \langle, \rangle) et $p \in \mathcal{L}_c(H)$ un projecteur de H , i.e. un endomorphisme continu vérifiant $p \circ p = p$.

- Démontrer que H s'écrit comme somme directe de $Im(p)$ et $Ker(p)$.
- Démontrer que p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p$ est 1-Lipschitzien.

Indication: pour le sens \Leftarrow , on fera un dessin et regarder un $x \in (Ker(p))^\perp$.

Exercice 25. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire L^2 . Soit $C = \{f \in E | f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Commenter.

Exercice 26. Soit (H, \langle, \rangle) un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormale peut se compléter en une base hilbertienne de H .

Exercice 27. 1. Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx,$$

puis trouver

$$\max \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx$$

parmi les $g \in L^2(-1, 1)$ soumis à la contrainte

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 xg(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 g(x) dx = 0; \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

- Soit (H, \langle, \rangle) un espace de Hilbert. Soit $x_0 \in H$ et M un sous-espace vectoriel fermé de H , énoncer le problème de maximisation associé au problème $\min_{x \in M} \|x_0 - x\|$ sur le modèle de la question précédente.

Exercice 28. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, et $V = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 0\}$.

On rappelle que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ désigne les fonctions C^∞ à support compact (i.e. nulles en dehors d'un compact), que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel et que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

- Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$. On pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \phi_n(t) = \frac{1}{n} \phi\left(\frac{t}{n}\right).$$

- Montrer que

$$\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } H.$$

- Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$h = g - \left(\int_{\mathbb{R}} g(t) dt \right) \phi_n.$$

Montrer que la fonction h appartient au sous-espace V .

- En déduire que

$$V^\perp \subset C_c^\infty(\mathbb{R})^\perp.$$

- Conclure que le sous-espace V est dense dans H .

Exercice 29 (Théorème d'échantillonnage de Shannon). On considère

$$BL^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | \hat{f} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]\}.$$

- Montrer que BL^2 est un sous-espace fermé de L^2 . On considérera donc maintenant que BL^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire L^2 .
- Montrer que toute fonction $f \in BL^2$ est continue et de plus $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$.

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de $[-1/2, 1/2]$. On appellera cette fonction sinc.
4. on pose $\tau_x f : y \mapsto f(y - x)$. Montrer que $\{\tau_k(\text{sinc}) | k \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de BL^2 . Interpréter ce résultat. Que donne la formule de Parseval dans ce cas-là?
5. On décompose $f \in BL^2$ comme $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \tau_k(\text{sinc})(x)$. Démontrer que la convergence de cette série est uniforme.
6. Démontrer que tout $f \in BL^2$ est une fonction entière.

Exercice 30 (Polynômes orthogonaux). Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle fonction poids une fonction ρ mesurable, strictement positive, telle que $\int_I |x|^n \rho(x) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrale pour la mesure de densité ρ , muni de son produit scalaire canonique

$$\langle f, g \rangle := \int_I \rho(x) f(x) \bar{g}(x) dx.$$

On rappelle que cet espace est un espace de Hilbert.

1. Montrer que $L^2(I, \rho)$ contient l'ensemble des polynômes.
2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes unitaires $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonale et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
3. Démontrer que les zéros des polynômes P_n sont distincts, réels et tous dans l'intervalle I . On introduira le polynôme $S(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)$, où x_i sont les points à l'intérieur de I où P_n change de signe.
4. Démontrer que pour $n \geq 1$ on a la formule par récurrence $P_{n+1} = (x - A_n)P_n - B_n P_{n-1}$, où

$$A_n = \frac{\langle x P_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \text{ et } B_n = \frac{\langle x P_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0.$$

En déduire qu'entre (au sens strict) chaque racine du polynôme P_n se trouve exactement une racine de P_{n+1} .

6. Exemple (polynômes d'Hermite): on pose $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$ (c'est bien une fonction poids).
 - (a) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 .
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n(X) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right).$$

- (c) Montrer que $\|P_n\|_2 = \pi^{1/4} \sqrt{n!}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n^\xi(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-i\xi x)^k}{k!}.$$

- (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P_n^\xi(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-i\xi x}$.
- (e) Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |P_n^\xi(x)| \leq e^{|\xi x|}$.
- (f) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \langle P_n, f \rangle = 0$. Soit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$.
- (g) Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(x) dx = 0.$$

Indication. On pourra calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} P_n^\xi(x) g(x) dx$.

(h) En déduire que f est identiquement nulle.

(i) Donner une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

7. Déduire de l'exemple précédent une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Autres applications.

Exercice 31. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On rappelle que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\forall (x, y) \in H^2, \langle x, y \rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Les fonctions bilinéaires suivantes sont-elles continues et coercives sur H ?

(i) $a(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_{n+1}$, (ii) $b(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+1} y_{n+1}$,

(iii) $c(x, y) = x_0 y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n)$, (iv) $d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} y_{n+1} + 2x_n y_{n+1} + 2x_n y_n)$.

Exercice 32 (Théorème de Babuska-Lax-Milgram, 1971). On considère deux espaces de Hilbert réels $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $(V, (\cdot, \cdot))$ et $a : U \times V$ une forme bilinéaire continue, i.e. $\exists \beta > 0$ tel que pour tout $(u, v) \in U \times V$, on a $|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_U \|v\|_V$. On suppose de plus que a est faiblement coercive au sens suivant: il existe $\alpha > 0$ tel que $\sup_{\|v\|=1} |a(u, v)| \geq \alpha \|u\|$ et pour tout $v \neq 0 \in V$, on a $\sup_{\|u\|=1} |a(u, v)| > 0$. Soit $l \in V'$.

Démontrer qu'il existe un unique $u \in U$ tel que $a(u, v) = l(v), \forall v \in V$.

Exercice 33 (Equation de Schrödinger). Soit $L > 0$. On considère l'équation suivante, appelée équation de Schrödinger avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times]0, L[, \\ u(0, x) = u_0(x) & \in C^4[0, L], \\ u(t, x=0) = u(t, x=L) = 0 & \text{sur } [0, \infty[. \end{cases} \quad (1)$$

Une solution de (1) est une fonction $u \in C^1([0, +\infty[\times]0, L])$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait $x \mapsto u(t, x) \in C^2([0, L])$, vérifiant (1).

1. Chercher les solutions de cette équation à variables séparées.
2. Démontrer l'existence d'une solution.
3. Montrer que toute solution u à (1) est telle que son énergie est conservée:

$$\int_0^L |u|^2(t) dt = \int_0^L |u_0|^2(x) dx.$$

On pourra multiplier la première ligne de (1) par \bar{u} , intégrer sur $[0, L]$ puis effectuer une intégration par parties.

4. En déduire l'unicité des solutions.
5. Démontrer que u est en fait définie sur $\mathbb{R} \times [0, L]$. Cette propriété est appelée réversibilité en temps.

Exercice 34 (Equation de la chaleur 2D). Soit $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$. Considère l'équation suivante, appelée équation de la chaleur sur un rectangle avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u - \partial_{yy} u = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times]0, L_1[\times]0, L_2[, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, x) = u_0(x) & \in L^2([0, L_1] \times [0, L_2]), \\ u(t, 0, y) = u(t, L_1, y) = 0 & \text{sur }]0, \infty[\times [0, L_2], \\ u(t, x, 0) = u(t, x, L_2) = 0 & \text{sur }]0, \infty[\times [0, L_2]. \end{cases}$$

Sur le modèle de ce qui a été fait en cours pour l'équation de la chaleur, démontrer l'existence d'une unique solution (dans une classe appropriée) pour cette équation.

Indication: on démontrera que sur les fonctions à variables x et y séparées sont denses dans $L^2([0, L_1] \times [0, L_2])$.

Exercice 35 (Base orthonormale d'ondelettes de Haar). On considère $\varphi = 1_{[0,1]}$. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\varphi_{j,k}(x) := 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right), \quad V_j := \overline{\text{Vect}(\varphi_{j,k}(x) | k \in \mathbb{Z})}.$$

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $V_j \subset V_{j+1}$.
2. Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la famille $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. La famille $\{\varphi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$ forme-t-elle une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$?
3. Soit $a < b$. Montrer que $1_{[a,b]}$ peut être écrite comme limite de fonctions de la famille $\{\varphi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$.
4. En déduire que $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Dans la suite, pour $j \in \mathbb{N}$, on note W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans l'espace V_{j+1} . Soit

$$\psi(x) : \begin{cases} x \in [0, 1/2[\mapsto 1 \\ x \in [1/2, 1] \mapsto -1 \\ x \notin [0, 1] \mapsto 0. \end{cases}$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right).$$

5. Montrer que $H = V_0 \oplus \left(\overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j}\right)$.
6. Montrer que $\{\psi_{0,k}(x) | k \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de W_0 .
Indication: pour $p \in \mathbb{N}$, on cherchera une relation entre $\varphi_{1,2p}, \varphi_{1,p+1}$ et les fonctions $\varphi_{0,p}$ et $\psi_{0,p}$.
7. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\{\psi_{j,k}(x) | k \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de W_j .
8. Déduire que $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, appelée *base d'ondelettes de Haar*.

Un peu de vocabulaire:

- φ est appelée une *ondelette père* et ψ une *ondelette mère*.
- La suite croissante d'espace V_j est appelé un *filtre multirésolution*.
- L'espace W_j correspond au *niveau de résolution j* .
- La décomposition de f dans la base hilbertienne précédente s'appelle *décomposition en ondelettes*.



Figure 1: À gauche, l'image originale. À droite, l'image où on n'a conservé que 10% des premiers coefficients dans la base de Haar 2D similaire à la base 1D précédente (une image en niveau de gris est une fonction $L^2((0,1)^2)$ à valeurs dans \mathbb{R} , que l'on peut prolonger par une fonction $L^2(\mathbb{R}^2)$ par 0). Source: polycopié d'analyse de première année à l'ENS Cachan, Fabre, Gousseau, Morel.