Université Paris-Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen 2011-2012. Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Un conseil : n'abandonnez pas le problème si vous ne savez pas faire une question ! Passez cette question et essayez de faire la suite...*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème d'Ascoli.
2. Donner la définition de la semi-continuité inférieure.
3. Enoncer le théorème-définition de l'adjoint d'un opérateur borné.
4. Montrer que si A est un opérateur borné sur un espace de Hilbert, alors

$$\operatorname{Ker} A = (Im\, A^*)^\perp \quad \text{et} \quad (\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^*}$$

2. Problème

Partie 1.

Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ une fonction **croissante** et telle que

$$G(x) := \int_0^x g,$$

satisfasse : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) \geq M.$$

On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + (1+x^2)u(x) + g(u(x)) = f(x) & \text{dans} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{E}$$

où f est une certaine fonction de $L^2(0,1)$.

On dira que u est *solution faible* de (E), lorsque $u \in H_0^1(0,1)$ et est telle que

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 [(1+x^2)u(x) + g(u(x)) - f(x)]v(x)\,dx = 0. \tag{*}$$

a. Montrer que si $u, v \in H_0^1(0,1)$, alors tous les termes apparaissant dans (*) sont intégrables.
b. Montrer que si $u \in C^2([0,1])$ est solution de (E), alors u est solution de (*).

c. Montrer que G est convexe.
d. Soit $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ défini par

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx + \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{2}u(x)^2 + G(u(x)) - f(x)u(x)\right)dx.$$

Montrer que J est bien définie, continue et différentiable sur $H_0^1(0,1)$.
e. Montrer que $u \in H_0^1(0,1)$ satisfait (*) si et seulement si $d_G J(u) = 0$.
f. Montrer qu'il existe un unique u solution faible de (E).
g. On suppose que $f \in C^\infty([0,1])$. Montrer qu'un tel u est de classe $C^\infty([0,1];\mathbb{R})$.

Partie 2.

a. Soit $f \in L^2(0,1)$, justifier qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 [(1+x^2)u - f]v\,dx = 0. \tag{$\square$}$$

On notera ce u sous la forme $u := A(f)$.
b. Montrer que l'application $f \mapsto A(f)$ est linéaire.
c. Montrer que pour tout $f \in L^2(0,1)$, on a :

$$\|A(f)\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|A(f)\|_{L^2}.$$

En déduire que A est un opérateur borné sur $L^2(0,1)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^2(0,1)$, on ait :

$$\|A(f)\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

d*. Montrer que A est un opérateur compact.
e. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $C^\infty([0,1];\mathbb{R})$. Montrer que $A(f_1), A(f_2) \in C^\infty([0,1];\mathbb{R})$ et que

$$\int_0^1 f_1 A(f_2) = \int_0^1 f_2 A(f_1).$$

En déduire que A est auto-adjoint.
f. Que peut-on en déduire ?

3. Exercice

Soit A une application linéaire d'un Hilbert H dans lui-même.

1. Montrer que si $\{A(x),\ x \in \overline{B}(0,1)\}$ est borné, alors A est continue.
2. On suppose que A n'est pas continue : en déduire qu'il existe une suite $(y_n) \in (\overline{B}(0,1))^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|A(y_n)\| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

3. Montrer que si A est une application linéaire de H dans lui-même satisfaisant la propriété

$$\text{pour toute suite } (x_n) \text{ telle que } x_n \rightharpoonup x, \text{ on a } A(x_n) \rightharpoonup A(x),$$

alors A est continue.

Barème <u>indicatif</u> : Ex. 1 : 5 points, Prob. 2 : 11 points, Ex. 3 : 4 points.

*Question plus difficile