Corrigé de certains exercices du TD 3

Correction de l'exercice n° 1 :

1. Raisonnons par l'absurde. On suppose que E admet une base algébrique dénombrable infinie $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $F_n = Vect(e_1, \ldots, e_n)$. F_n est un sous-espace vectoriel fermé de E puisque F_n est de dimension finie. De plus, F_n est nécessairement d'intérieur vide. En effet, s'il était d'intérieur non vide, il contiendrait une boule $B(x_0, r)$ avec $x_0 \in F_n$ et $r > 0$. E_n étant un espace vectoriel contenant x_0, il contiendrait alors $B(x_0, r) - x_0 = B(0, r)$. Notamment, pour $0 < \lambda < \frac{r}{||e_{n+1}||_0}$, on a $\lambda e_{n+1} \in B(0, r) \subset E_n$, ce qui implique que $e_{n+1} \in E_n$. Ceci est faux puisque $e_{n+1} \notin Vect(e_1, \ldots e_n)$. Ainsi, on a bien montré que E n'admet pas de base algébrique dénombrable.
2. Non. En effet, $\mathbb{R}[X] = Vect((X^n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ donc $\mathbb{R}[X]$ admet une base algébrique dénombrable, il ne peut donc être complet pour aucune norme par contraposée du résultat précédent.

Correction de l'exercice n° 3 :

1. On pose
$$F_n = \{x \in E \text{ t.q. } \forall i \in I,\, ||T_i(x)|| \leqslant n\}.$$
F_n est en ensemble fermé de E. En effet,
$$F_n = \cap_{i\in I} ||T_i||^{-1}([0, n]).$$
L'application $||T_i||$ étant continue par composition de fonction continues, $||T_i||^{-1}([0, n])$ est fermé. Une intersection quelconque d'ensembles fermés étant fermée, on a bien que F_n est fermé.
De plus, $\cup_{i=1}^{\infty} F_n = E$. En effet, si $x \in E$, pour n suffisamment grand, on a forcément $x \in F_n$ (il suffit de prendre $n \geqslant c(x)$, on a alors bien pour tout $i \in I$ que $||T_i x|| \leqslant c(x) \leqslant n$).
Ainsi, $\cup_{i=1}^{\infty} F_n$ est d'intérieur non vide. En appliquant la contraposée du Théorème de Baire version fermée, on en déduit qu'il existe au moins un $N \in \mathbb{N}$ tel que F_N est d'intérieur non vide. Soient $x_0 \in F_N$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset F_N$. Alors, pour tout x tel que $||x|| \leqslant 1$, on a $x_0 + xr \in B(x_0, r) \setminus F_N$ et donc pour tout $i \in I$, on a $||T_i(x_0 - rx)|| \leqslant N$. Ainsi, on a par linéarité des T_i que pour tout $i \in I$ et en utilisant que $x_0 \in F_N$ que
$$||T_i(x) = ||\frac{1}{r} T_i(x_0 - x_0 - rx)|| \leqslant ||\frac{1}{r} T_i(x_0) - \frac{1}{r} T_i(x_0 - rx)|| \leqslant \frac{1}{r} ||T_i(-x_0)|| + \frac{N}{R} \leqslant \frac{2N}{r}.$$
On a donc pour tout $x \neq 0$, en posant $c = \frac{2N}{r}$, on a $||T_i(x)|| = ||x|| T_i\left(\frac{x}{||x||}\right) \leqslant c||x||$.
2. On applique le théorème de Banach-Steinhaus. On sait que si $T_n x \to Tx$, la fonction T est bien linéaire par un résultat bien connu. Reste à montrer qu'elle est continue. La suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée, autrement dit il existe un $c(x) \geqslant 0$ (dépendant de x mais pas de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $||T_n(x)|| \leqslant c(x)$. les T_n étant des opérateurs bornés, on a existence de $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||T_n(x)|| \leqslant c||x||$. On en déduit donc en faisant $n \to +\infty$ que $||T(x)|| \leqslant c||x||$. Ainsi, $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$. De plus, de l'inégalité $||T_n x|| \leqslant |||T_n|||\, ||x||$, on déduit en passant à la limite inférieure que
$$\liminf_{n\to\infty} ||T_n x|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |||T_n|||\, ||x||.$$
A gauche, la limite inférieure est une vraie limite et (la limite inférieure à droite est finie puisque la suite $|||T_n|||$ est bornée par ce qui précède). On en déduit que pour tout x tel que $||x|| \leqslant 1$, on
$$||Tx|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |||T_n|||,$$
d'où en déduit en passant au sup sur les $|||x||| \leqslant 1$ à gauche que $|||T||| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |||T_n|||$.

3. Le sens direct est évident : si une fonction à deux variables est continue, elle est séparément continue par rapport à chacune des variables (on peut par exemple revenir à la définition séquentielle). Le sens difficile (et pas toujours vrai en général) est le sens réciproque. On sait que pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto a(x,y)$ est continue : il existe donc un certain $c(x) > 0$ tel que pour tout $y \in F$, on ait $||a(x,y)|| \leqslant c(x)||y||$. En se restreignant aux $||y|| \leqslant 1$, on en déduit que

$$||y|| \leqslant 1 \Rightarrow ||a(x,y)|| \leqslant c(x).$$

De plus, pour tout y tel que $||y|| \leqslant 1$, l'application $x \mapsto a(x,y)$ est continue. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus et en déduire qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ tel que $||y|| \leqslant 1$, on ait $||a(x,y)|| \leqslant c||x||$. Si maintenant $y \in F$, alors $\frac{y}{||y||}$ est de normée inférieure à 1. On en déduit par linéarité que $x \in E$ et tout $y \in F$ non nul (le résultat est de toute façon évident si $y = 0$), on ait

$$||a(x,y)|| = ||y||\,||a(x, \frac{y}{||y||})|| \leqslant c||x||\,||y||.$$

Le résultat devient faux si on F n'est pas supposé complet. Considérons $E = F = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P|| = \int_0^1 |P|$, et $G = \mathbb{R}$. On considère l'application bilinéaire suivante :

$$a(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

On applique ceci à la suite $(P_n) = (Q_n) = (X^n)$. On remarque que

$$||P_n||_1 = ||Q_n||_1 \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)^2},$$

alors que

$$a(P,Q) = \int_0^1 X^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}.$$

On a donc que

$$\frac{|a(P_n,P_n)|}{||P_n||^2} = \frac{(n+1)^2}{2n+1} \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

Ceci interdit donc l'existence de $\beta > 0$ tel que pour tout $(P,Q) \in E^2$, on ait $|a(P,Q)| \leqslant \beta||P||\,||Q||$.

Correction de l'exercice n° 10 :

1. Le sens direct est évident. En effet, le graphe de A est

$$G(A) = \{(x,y) \in E \times F \text{ tel que } y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \text{ tel que } x \in E\}.$$

Si A est continue, soit (x_n, y_n) une suite d'éléments de $G(A)$ tel que $(x_n, y_n) \to (x,y) \in E \times F$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n = A(x_n)$ puisqu'on est dans le graphe. De plus $x_n \to x$ et A est continue donc $A(x_n) \to A(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit bien que $y = Ax$ et donc $(x,y) = (x, Ax) \in G(A)$. Reste à montrer le sens réciproque. Pour ce faire, on introduit la norme suivante sur E :

$$N(x) = ||x|| + ||Ax||.$$

Il est évident de voir que c'est bien une norme (l'homogénéité est le caractère défini positif sont évidents, l'inégalité triangulaire aussi en utilisant la linéarité de T). De plus, pour tout $x \in E$, on a

$$||x|| \leqslant N(x).$$

Pour appliquer le résultat vu en cours, il faut montrer que $(E, N(\cdot))$ est un espace complet (c'est évidemment déjà le cas pour $(E, ||\cdot||)$). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un certain $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^*$ tels que $n, m \geqslant M$, on ait

$$N(x_n - x_m) \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, en utilisant la linéarité de A, on a : pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ tels que $n, m \geqslant M$,

$$||x_n - x_m|| + ||Ax_n - Ax_m|| \leqslant \varepsilon.$$

Notamment, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ tels que $n, m \geqslant M$, on a

$$||x_n - x_m|| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc de Cauchy, elle converge donc vers un certain $x \in H$. Maintenant, on sait aussi que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ tels que $n, m \geqslant M$,

$$||Ax_n - Ax_m|| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi de Cauchy, elle converge donc vers un certain $y \in H$. On a donc $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$. Les éléments (x_n, Ax_n) étant évidemment dans le graphe de A qui est supposé fermé par hypothèse, on obtient que $y = Ax$. Ainsi, on a bien $x_n \to x$ et $Ax_n \to Ax$, ce qui est équivalent à $x_n \to x$ pour la norme $N(\cdot)$ et montre que toute suite de Cauchy converge.

On peut alors appliquer le résultat du cours et dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait

$$||x|| + ||Ax|| \leqslant C||x||.$$

On a donc nécessairement que $C \geqslant 1$ et $||Ax|| \leqslant (C-1)||x||$, ce qui donne la continuité de A.

2. On va tenter d'appliquer le théorème du graphe fermé. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $G(A)$ tel que $(x_n, y_n) \to (x, y) \in H \times H$. On a donc $y_n = Ax_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$. Reste à démontrer que $y = Ax$. Soit $h \in H$. On applique notre hypothèse de positivité à l'élément $x_n + h$. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\langle Ax_n + Ah, x_n + h\rangle \geqslant 0.$$

On fait $n \to \infty$ pour obtenir

$$\langle y + Ah, x + h\rangle \geqslant 0.$$

On réécrit ceci sous la forme

$$\langle y - Ax + A(x+h), x + h\rangle \geqslant 0.$$

On pose alors $h = -x + th'$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $h' \in H$ fixé, de telle sorte que $x + h = \lambda h'$. On obtient

$$\langle y - Ax + th', th'\rangle \geqslant 0.$$

si $t > 0$, on divise par t et on obtient

$$\langle y - Ax + th', h'\rangle \geqslant 0.$$

En faisant $t \to 0$, on obtient

$$\langle y - Ax, h'\rangle \geqslant 0.$$

Maintenant, si $t < 0$, en divisant par t, le signe change et on obtient

$$\langle y - Ax + th', h'\rangle \leqslant 0.$$

En faisant $t \to 0$, on obtient

$$\langle y - Ax, h'\rangle \leqslant 0.$$

Finalement, pour tout $h' \in H$, on a $\langle y - Ax, h'\rangle = 0$, ce qui signifie que $y - Tx = 0$ et donc que $y = Tx$.

3. C'est une conséquence du théorème du graphe fermé. En effet, $T_{|G}$ est linéaire. Reste à montrer que son graphe est fermé. Par un raisonnement analogue au précédent, on considère une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de G qui converge vers $x \in G$ pour la norme de G, et on suppose que $Tx_n \to y \in G$ pour la norme de G. Il est très facile de voir qu'en fait, $x_n \to x$ pour la norme dans E et que $Tx_n \to y$ pour la norme dans E (en utilisant l'inégalité supposée de l'énoncé sur les normes). Or T est continue sur E pour la norme associée à E, son graphe est donc fermé et on en déduit que $Tx_n \to Tx$ pour $||\cdot||_E$. Or $Tx_n \to y$ pour $||\cdot||_G$ et donc pour $||\cdot||_E$ en utilisant l'inégalité de l'énoncé sur les normes. Par unicité de la limite, on a bien $y = Tx$. De plus, $y \in G$ et $x \in G$. On a donc bien que le graphe de $T_{|G}$ est fermé pour la norme $||\cdot||_G$, ce qui conclut la preuve.