Examen du 17 janvier 2020

Durée: 3 heures

Exercice 1. On considère l'espace de Hilbert réel $H = L^2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

On rappelle le théorème suivant, qui est une version faible de la réciproque du théorème de convergence dominée, et que l'on pourra utiliser sans démonstration.

Théorème 1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ tels que $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R})$ (la convergence ayant lieu en norme L^2). Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f.*

On se donne $\alpha < \beta$ deux réels, et on pose

$$C := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tels que } \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta \text{ p.p.}\}.$$

1. **Montrer que C est non vide si et seulement si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$. On supposera dorénavant cette condition vérifiée.**

   Si $\alpha > 0$ (ce qui implique $\beta > 0$), alors si $f \in C$, $f \notin L^2(\mathbb{R})$ puisqu'on aurait

   $$\int_{\mathbb{R}} f^2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \alpha^2 = +\infty.$$

   D'où $C = \emptyset$. De même, si $\beta < 0$ (ce qui implique $\alpha < 0$), alors si $f \in C$, $f \notin L^2(\mathbb{R})$ puisqu'on aurait

   $$\int_{\mathbb{R}} f^2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \beta^2 = +\infty.$$

   D'où $C = \emptyset$. Ainsi, on a forcément $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$. Dans ce cas, C est non vide puisque la fonction nulle appartient à C.

2. **Montrer que C est un convexe fermé.**

   C est trivialement convexe: si $(f, g) \in C^2$ et $t \in [0, 1]$, alors $1 - t \in [0, 1]$ et des inégalités

   $$t\alpha \leqslant tf(x) \leqslant t\beta, \text{ et } (1-t)\alpha \leqslant (1-t)g(x) \leqslant (1-t)\beta \text{ p.p.},$$

   on tire en sommant que

   $$(1-t)t\alpha + t\alpha = \alpha \leqslant tf(x) + (1-t)g(x) \leqslant t\beta + (1-t)\beta = \beta \text{ p.p.}.$$

   Pour montrer que C est fermé, on va utiliser le Théorème 1. Supposons qu'on considère une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (avec $f \in L^2(\mathbb{R})$). On veut montrer que $f \in C$. On remarque qu'il existe une extraction φ telle que $(f_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers f. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\alpha \leqslant f_n(x) \leqslant \beta.$$

   On peut faire $n \to \infty$ et en déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta.$$

   Ceci signifie exactement que $f \in C$.

3. **Calculer la projection orthogonale sur C.**

Il est raisonnable de se dire qu'un bon candidat pour la projection orthogonale sur C est de "tronquer" une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, en ne gardant que ses parties au dessus de α et en dessous de β. Autrement dit, on va poser

$$P_C(f) = \max(\alpha, \min(f, \beta)).$$

Vérifions pour commencer que $P_C(f) \in L^2(\mathbb{R})$. C'est une conséquence du fait que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|P_C(f)(x)| \leqslant |f(x)|$. En effet, si on considère $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$, alors on a

$$\max(\alpha, \min(f(x), \beta)) = \max(\alpha, f(x)) \geqslant f(x).$$

Ces deux dernières quantités étant négatives ou nulles, on en déduit que si $f(x) \leqslant 0$, on a $|P_C(f)(x)| \leqslant |f(x)|$. Maintenant, on considère $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant 0$, alors on a

$$\max(\alpha, \min(f(x), \beta)) = \min(f(x), \beta) \leqslant f(x).$$

Ces deux dernières quantités étant positives ou nulles, on en déduit que si $f(x) \geqslant 0$, on a aussi $|P_C(f)(x)| \leqslant |f(x)|$. Ainsi, on a bien $|P_C(f)| \leqslant |f|$ et donc $P_C(f) \in L^2(\mathbb{R})$. De plus, il est clair que $\alpha \leqslant P_C(f)(x)$ presque partout (par construction, on prend le maximum entre α et une quantité plus petite que $f(x)$) et que $P_C(f)(x) \leqslant \beta$ presque partout (on a $\min(f(x), \beta)$ qui est plus petit que β, et comme $\alpha < 0$, prendre le max avec α ne change pas le fait que l'on ait plus petit que β).

Il reste donc à démontrer que $P_C(f)$ et bien la projection orthogonale sur f. On peut utiliser la caractérisation angulaire de la projection orthogonale. On commence par remarquer que

$$f - P_C(f) = \begin{cases} f - \alpha \text{ si } f < \alpha, \\ \quad 0 \text{ si } f \in [\alpha, \beta], \\ f - \beta \text{ si } f > \beta. \end{cases}$$

Maintenant, si $g \in C$, alors

$$g - P_C(f) = \begin{cases} g - \alpha \text{ si } f < \alpha, \\ f - g \text{ si } f \in [\alpha, \beta], \\ g - \beta \text{ si } g > \beta. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \langle f - P_C(f), g - P_C(f) \rangle &= \int_{f<\alpha} (f - \alpha)(g - \alpha) + \int_{f \in [\alpha,\beta]} 0.(f - g) + \int_{f>\beta} (f - \beta)(g - \beta) \\ &= \int_{f<\alpha} (f - \alpha)(g - \alpha) + \int_{f>\beta} (f - \beta)(g - \beta). \end{aligned}$$

Or, sur l'ensemble $f < \alpha$, on a $f - \alpha < 0$, et puisque $g \in C$, on a $g - \alpha \geqslant 0$. Ainsi, $(f - \alpha)(g - \alpha) < 0$. De même, sur l'ensemble $f > \beta$, on a $f - \beta > 0$, et puisque $g \in C$, on a $g - \beta \leqslant 0$. Ainsi, $(f - \alpha)(g - \alpha) < 0$. On a donc bien: pour tout $g \in C$,

$$\langle f - P_C(f), g - P_C(f) \rangle \leqslant 0,$$

ce qui signifie que $P_C(f)$ est bien la projection orthogonale sur C.

Exercice 2. On se place dans l'espace $H^1(0, 1)$. On munit $H^1(0, 1)$ de deux produits scalaires différents:

$$\langle u, v \rangle_1 = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt \text{ et } \langle u, v \rangle_2 = \int_0^1 u(t)v(t)dt + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt.$$

1. **Justifier rapidement que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ est un produit scalaire. Pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, que reconnaît-on?**

Le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ soit bilinéaire symétrique est évident. Il est positif car pour tout $u \in H^1(0, 1)$, on a

$$\langle u, u \rangle_1 = u(0)^2 + \int_0^1 u'(t)^2 dt \geqslant 0.$$

Pour le caractère défini, on remarque que

$$\langle u, u \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow u(0)^2 + \int_0^1 u'(t)^2 dt = 0 \Leftrightarrow u(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 u'(t)^2 dt = 0.$$

Autrement dit, comme $u' \in L^2(0, 1)$, on doit avoir $u' = 0$ presque partout, et comme $u \in H^1(0, 1)$, on a donc u constante. Mais $u(0) = 0$, donc u est bien nul partout. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est le produit scalaire usuel de $H^1(0, 1)$.

2. **Montrer que pour tout $u \in H^1(0,1)$, $u^2 \in H^1(0,1)$ puis que pour tout $x \in [0,1]$,**

$$u(x)^2 \leqslant u(0)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx + 2\int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

On remarque que $u^2 \in H^1(0,1)$, comme produit de deux fonctions de $H^1(0,1)$. On peut donc lui appliquer le théorème du représentant continu et dire que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$u(x)^2 = u(0)^2 + 2\int_0^x u(t)u'(t)dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$u(x)^2 \leqslant u(0)^2 + 2||u||_{L^2(0,1)}||u'||_{L^2(0,1)}.$$

De l'inégalité de Young $ab \leqslant \frac{1}{2}(\frac{a^2}{2} + 2b^2)$, on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$u(x)^2 \leqslant u(0)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx + 2\int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

3. **Montrer que les normes associées à ces deux produits scalaires (notées respectivement $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$) sont équivalentes.**

On remarque que pour tout $u \in H^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 u'(t)^2 dt \leqslant ||u||_2^2.$$

De plus, par continuité de l'application évaluation en 0, on a existence d'une constante $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(0,1)$, $|u(0)| \leqslant C||u||_2$. Ainsi, on a bien

$$||u||_1^2 \leqslant (1 + C^2)||u||_2^2.$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, on utilise la question précédente, que l'on intègre entre 0 et 1. On obtient

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leqslant u(0)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx + 2\int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leqslant 2u(0)^2 + 4\int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

Ainsi,

$$||u||_2^2 \leqslant 2u(0)^2 + 5\int_0^1 u'(x)^2 dx \leqslant 5||u||_1^2.$$

On a donc bien équivalence des normes.

4. **On fixe $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un unique élément $v_t \in H^1(0,1)$ tel que pour tout $u \in H^1(0,1)$,**

$$u(t) = u(0)v_t(0) + \int_0^1 u'(s)v_t'(s)ds,$$

Déterminer explicitement v_t.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H^1(0,1)$ muni de sa norme usuelle (attention, ici u et v sont échangés par rapport aux notations habituelles). On pose $l(u) = u(t)$. C'est une forme linéaire continue sur $H^1(0,1)$ par continuité de la fonction évaluation en t. On pose

$$a(v,u) = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(s)v'(s)ds.$$

a est trivialement une forme bilinéaire. Elle est continue par la question 3 puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $(v,u) \in H^1(0,1)^2$, on a

$$|a(v,u)| = |\langle u,v\rangle_1| \leqslant ||u||_1||v||_1 \leqslant (1 + C^2)||u||_2||v||_2.$$

Enfin, elle est coercive car grâce à la question 3, on a, pour tout $v \in H^1(0,1)$,

$$a(v,v)| = ||v||_1^2 \geqslant \frac{1}{5}||v||_2^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram assure donc qu'il existe un unique élément $v_t \in H^1(0,1)$ tel que pour tout $u \in H^1(0,1)$, on ait

$$u(t) = u(0)v_t(0) + \int_0^1 u'(s)v_t'(s)ds.$$

Il est très facile de déterminer explicitement v_t. En effet, en comparant avec le théorème du représentant continu

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)ds,$$

on aurait envie de faire en sorte que $v_t(0) = 1$ et que $v_t'(x) = 1_{[0,t]}(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$. Ainsi, il est tentant de poser

$$v_t(x) = \begin{cases} (1+x) \text{ si } x \leqslant t, \\ (1+t) \text{ si } x > t \end{cases}$$

Cette fonction est bien continue et dans $L^2(0,1)$, avec $v_t(0) = 1$. De plus, on remarque que pour tout $x \in [0,t]$, on a

$$v_t(x) = 1 + x = 1 + \int_0^x 1ds = \int_0^x 1_{[0,t]}(s)ds,$$

et de même, pour $x \in [t,1]$, on a

$$v_t(x) = 1 + t = 1 + \int_0^t 1ds = \int_0^x 1_{[0,t]}(s)ds.$$

Ainsi, on a bien $v_t \in H^1(0,1)$ et la formule voulue.

Exercice 3. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'espace

$$E = \{u \in H^1(0,1) \text{ telles que } u(0) = a,\, u(1) = b\}.$$

On rappelle que E est un sous-espace affine fermé (grâce à la continuité des applications évaluation en 0 et 1) de $H^1(0,1)$. On considère la fonctionnelle suivante sur l'espace E:

$$J(u) = \int_0^1 \left[u'(x)^2 + u(x)u'(x) + \cosh(u(x))\right] dx.$$

Rappelons les fonctions sinus et cosinus hyperboliques, de classe C^∞ et définies par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. **Montrer:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$**.**

   On peut par exemple utiliser le développement en série entière du cosinus hyperbolique:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

   Tous les termes du développement étant positifs, on peut minorer par la somme des deux premiers termes, qui vaut $1 + \frac{x^2}{2}$.

2. **Justifier rapidement que J est une fonctionnelle bien définie sur H (et donc sur E).**

   u' étant dans $L^2(0,1)$, on a bien que $\int_0^1 u^2 < +\infty$. Comme u et u' sont dans $L^2(0,1)$, leur produit uu' est dans $L^1(0,1)$, de telle sorte que $\int_0^1 uu'$ a un sens. Enfin, u étant continue sur $[0,1]$ et cosh est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\cosh \circ u$ est continue sur $[0,1]$, son intégrale a donc bien un sens.

3. (a) **Montrer que pour tout $u \in E$, on a**

$$\Big|\int_0^1 uu'\Big| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right).$$

On utilise l'inégalité de Young $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec $a = u(x)$ et $b = u'(x)$. On obtient

$$u(x)u'(x) \leq \frac{1}{2}\left(\left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right).$$

On intègre entre 0 et 1 pour obtenir

$$\int_0^1 uu' \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right).$$

Maintenant, on applique l'inégalité de Young à $a = -u(x)$ et $b = u'(x)$. On obtient

$$-u(x)u'(x) \leq \frac{1}{2}\left(\left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right).$$

On intègre entre 0 et 1 pour obtenir

$$-\int_0^1 uu' \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right).$$

On a donc bien le résultat voulu.

(b) **En déduire que pour tout $u \in E$, $J(u) \geq 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx$. On notera $I := \inf_{u \in E} J(u)$, qui est donc fini.**

Pour $u \in E$, on a

$$J(u) = \int_0^1 \left[u'(x)^2 + u(x)u'(x) + \cosh(u(x))\right] dx \geqslant \int_0^1 u'(x)^2 dx - \left|\int_0^1 u(x)u'(x)dx\right| + \int_0^1 \cosh(u(x))\, dx.$$

Grâce à la question précédente, on obtient

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx + \int_0^1 \cosh(u(x))dx.$$

De l'inégalité de la première question, on tire

$$\int_0^1 \cosh(u(x))dx \geqslant 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)^2 dx.$$

On en déduit donc que

$$J(u) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx,$$

d'où le résultat voulu.

4. **On considère une suite minimisante (u_n) pour J. Montrer que la suite (u_n) est bornée dans E.**

Par définition, $J(u_n) \to I$ quand $n \to \infty$. Notamment, pour n suffisamment grand, $J(u_n) \leqslant I + 1$. Par les calculs de la question précédente, on a

$$J(u_n) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 u_n'(x)^2 dx.$$

Ainsi, la site (u_n') est bornée dans $L^2(a, b)$. Par le théorème du représentant continu, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,o n a

$$u_n(x) = a + \int_0^x u_n'(t)dt,$$

on a, en utilisant l'inégalité de Jensen,

$$||u_n||_\infty \leqslant |a| + ||u_n'||_{L^1(0,1)} \leqslant |a| + ||u_n'||_{L^2(0,1)}.$$

Or $||u_n||_{L^2(0,1)} \leqslant ||u_n||_\infty$, on en déduit donc que (u_n) est aussi bornée dans $L^2(0, 1)$. On en déduit que la suite (u_n) est bornée dans $H^1(0, 1)$ et donc dans E.

5. **Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de (u_n) qui converge faiblement dans E et fortement dans $C^0([0,1])$.**

Par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente $u_{\varphi(n)} \to \overline{u}$ avec $\overline{u} \in H^1(0,1)$. De plus, E est un convexe fermé fort donc un convexe fermé faible. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in E$, on en déduit que $\overline{u} \in E$. Enfin, par le théorème de Rellich, on en déduit que $u_{\varphi(n)}$ converge fortement vers $\overline{u}$ dans $C^0([0,1])$.

6. **Montrer qu'il existe une fonction $\overline{u} \in E$ qui minimise J.**

Il reste à démontrer que $J(\overline{u}) = I$. Pour ce faire montrons que la fonctionnelle J est convexe. Soient $(u,v) \in E$ et $t \in [0,1]$, on remarque que par convexité de cosh sur $\mathbb{R}$, on a déjà que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\cosh(tu(x) + (1-t)v(x)) \leqslant t\cosh(u(x)) + (1-t)\cosh v(x).$$

La convexité de la fonction carré donne de même, presque partout en x,

$$(tu(x) + (1-t)v(x))^2 \leqslant tu(x)^2 + (1-t)v(x)^2.$$

Enfin,

$$(tu(x) + (1-t)v(x))(tu'(x) + (1-t)v'(x)) = tu(x)u'(x) + (1-t)v(x)v'(x) - t(1-t)(u(x) - v(x))(u'(x) - v'(x)).$$

Regardons ce dernier terme: on a

$$\int_0^1 t(1-t)(u(x) - v(x))(u'(x) - v'(x))dx = t(1-t)\left[\frac{(u-v)^2}{2}\right]_0^1.$$

Or u et v ont la même valeur en 0 et 1, ce terme s'annule donc. Ainsi, en intégrant les trois inégalités ci-dessus, on obtient bien que

$$J(tu + (1-t)v) \leqslant tJ(u) + (1-t)J(v).$$

7. **Montrer que J est différentiable en tout point de $H^1(0,1)$ et calculer sa différentielle.**

Comme dans le cours, on commence par calculer la différentielle sur $H^1(0,1)$ tout entier. Séparons les différents termes. On remarque d'abord qu'un calcul explicite donne pour $(u,h) \in H^1(0,1)^2$ que

$$J(u) = \int_0^1 (u+h)'(x)^2 dx = \int_0^1 u'(x)^2 dx + 2\int_0^1 u'(x)h'(x)dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx.$$

Ce dernier terme est clairement un $o(h)$ quand h tend vers 0 en norme $H^1(0,1)$ puisqu'il est majoré par $||h||^2_{H^1(0,1)}$. De même,

$$\int_0^1 (u(x) + h(x))(u'(x) + h'(x))dx = \int_0^1 u(x)u'(x)dx + = \int_0^1 \left(u(x)h'(x) + u'(x)h(x)dx\right)dx + \int_0^1 h(x)h'(x)dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne que le dernier terme est majoré par $||h||^2_{H^1(0,1)}$, c'est donc un $o(h)$ quand h tend vers 0 en norme $H^1(0,1)$.

Enfin, point par point, on a, par un développement de Taylor-Lagrange,

$$\cosh(u(x) + h(x)) = \cosh(u(x)) + h(x)\sinh(u(x)) + \frac{h(x)^2}{2}\cosh(\xi),$$

où $\xi \in [u(x), u(x) + h(x)]$. Comme on fait tendre h vers 0 en norme $H^1(0,1)$, on peut par exemple supposer que $|h(x)| \leqslant 1$ en norme $L^\infty(0,1)$ (par injection de Sobolev) Alors le dernier terme est majoré par $Ch(x)^2$, avec C indépendant de h (mais dépendant de u). Une fois intégré, il est majoré par $||h||^2_{H^1(0,1)}$, c'est donc un $o(h)$ quand h tend vers 0 en norme $H^1(0,1)$. Ainsi, en mettant bout à bout les calculs précédents, on en déduit que pour tout $(u,h) \in H^1(0,1)^2$, on a

$$J(u+h) = J(u) + 2\int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h'(x) + u'(x)h(x) + h(x)\sinh(u(x)))dx + o(h),$$

la différentielle est donc donnée par

$$dJ(u)(h) = 2\int_0^1 u'(x)h'(x)\,dx + u(x)h'(x) + u'(x)h(x) + \int_0^1 \sinh(\overline{u}(x))h(x)x.$$

8. **Montrer que $\overline{u}$ satisfait : pour tout v dans $H_0^1(]0,1[)$,**

$$\int_0^1 \left[2\overline{u}'(x)v'(x) + \overline{u}(x)v'(x) + \overline{u}'(x)v(x) + sh(\overline{u}(x))v(x)\right] dx = 0.$$

On remarque que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, on a $\overline{u} + v \in E$. Ainsi, on peut appliquer (dans l'espace affine E, avec des directions quelconques dans $H_0^1(0,1)$) le critère d'ordre 1 qui dit que la différentielle en 0 doit s'annuler, ce qui donne le résultat voulu.

9. **Montrer que $\overline{u} \in C^2([0,1])$ et déterminer une équation pour $\overline{u}$.**

Comme $C_c^\infty(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, on peut appliquer la caractérisation précédente à $\varphi \in C_c^\infty(0,1) \subset H_0^1(0,1)$ et obtenir

$$\int_0^1 (2\overline{u}'(x) + \overline{u}(x))\varphi'(x)\, dx = -\overline{u}'(x)\varphi(x) - \int_0^1 sh(\overline{u}(x))\varphi(x)\, dx$$

On a $2\overline{u}' + \overline{u} \in L^2(0,1)$ et $-\overline{u} - sh(\overline{u}(x)) \in L^2(0,1)$ (comme somme de deux fonctions L^2 et d'une fonction $C^0([0,1])$). Par définition de la dérivée faible, on a bien $2\overline{u}' + \overline{u} \in H^1(0,1)$ et

$$(2\overline{u}' + \overline{u})' = \overline{u}' + \sinh(\overline{u}).$$

$\overline{u}$ étant lui-même dans $H^1(0,1)$, on en déduit par linéarité que $2\overline{u}' \in H^1(0,1)$ et que

$$2\overline{u}'' = \sinh(\overline{u}).$$

Le membre de droite étant une fonction continue sur $[0,1]$ (puisque sinh est continue et u aussi par théorème de cours), la dérivée faible de $\overline{u}'$ est dans $C^0([0,1])$. Par propriété de cours, ceci signifie que la dérivée faible est une dérivée forte, que $\overline{u}' \in C^1([0,1])$ et donc on a bien $\overline{u} \in C^2([0,1])$. De plus, $\overline{u}$ vérifie l'équation différentielle

$$-2\overline{u}'' + \sinh(\overline{u}) = 0.$$

10. **Si $a = b = 0$, calculer explicitement I, et montrer que $\overline{u}$ est unique.**

On a déjà $I \geqslant 1$ par la question 3. De plus, si $u = 0$, comme $\cosh(0) = 1$, on obtient $J(0) = 1$. Ainsi, $I = 1$, atteint en $\overline{u} = 0$. D'après la question 3, c'est le seul point où elle est atteint: si $v \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}$, alors v' ne peut être nul p.p., donc $\int_0^1 v'^2 > 0$ et donc $J(v) > 1$.

Exercice 4. On rappelle que l'on munit l'espace $L^2((-1,1),\mathbb{C})$ du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

On considère l'opérateur suivant

$$A : f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \mapsto \left(x \mapsto \int_{-1}^1 e^{itx} f(t)dt\right).$$

1. **Montrer que pour tout $f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$, on a $A(f) \in C^0([-1,1],\mathbb{C})$. Montrer que A est continu de $f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ dans $C^0([-1,1],\mathbb{C})$.**

C'est une simple application du théorème de continiuté sous le signe somme: si $x_n \to x$ dans $]-1,1[$, alors on a convergence simple de $e^{itx_n}f(t)$ vers $e^{itx}f(t)$. De plus, $|e^{itx}f(t)| \leqslant |f(t)|$ qui est intégrable sur $[-1,1]$ puisque continue. On en déduit bien que $A(f)$ est continue. De plus, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|A(f)(x)| \leqslant \int_{-1}^1 |f(t)|dt \leqslant 2||f||_\infty.$$

Donc $||A(f)||_\infty \leqslant 2||f||_\infty$ et A est bien continu.

2. **Montrer que $A : L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \to C^0([-1,1],\mathbb{C})$ est un opérateur compact.**

   On va appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Il suffit de montrer que $A(\overline{B}(0,1))$ est relativement compact. Cet ensemble est borné (par $|||A|||$). Pour montrer l'équicontinuité, il suffit de remarquer que pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$ et tout $t \in [0,1]$, on a (en utilisant l'inégalité des accroissements finis)

   $$|e^{itx} - e^{ity}| \leqslant |tx - ty| \leqslant |t||x-y| \leqslant |x-y|.$$

   Ainsi, on a

   $$|A(f)(x) - A(f)(y)| \leqslant \int_{-1}^{1} |e^{itx} - e^{ity}|\,|f(t)|dt \leqslant 2|x-y| \int_{-1}^{1} |f(t)|dt \leqslant 4|x-y|\,||f||_\infty.$$

   Ainsi, si $f \in \overline{B}(0,1)$, pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$, on a

   $$|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |Af(x) - Af(y)| \leqslant \varepsilon,\ \forall f \in \overline{B}(0,1).$$

   Comme $[0,1]$ est un segment, on a toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela et en déduire que A est un opérateur compact.

3. **En déduire que A vu comme un opérateur de $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ dans lui-même est un opérateur compact. On s'intéressera maintenant uniquement à cet opérateur.**

   Il suffit de faire la composition entre l'opérateur compact $A : L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \to C^0([-1,1],\mathbb{C})$ et l'opérateur continu $Id : C^0([-1,1],\mathbb{C}) : L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ (car $||f||_{L^2(-1,1)} \leqslant ||f||_{C^0([-1,1])}$), qui est un opérateur compact par propriété de cours.

4. **Calculer A^*.**

   On utilise la définition de l'adjoint. Pour $(f,g) \in L^2(-1,1)$ et en appliquant Fubini, on obtient

   $$\langle Af, g\rangle = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} e^{itx} f(t)dt\right) \overline{g(x)}dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(t)e^{itx}\overline{g(x)}dxdt = \int_{-1}^{1} f(t) \left(\int_{-1}^{1} \overline{e^{-itx} g(x)}dx\right) dt = \langle f, A^* g\rangle,$$

   avec

   $$A^* g : g \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \mapsto (t \in (-1,1) \mapsto e^{-itx} g(x)dx).$$

5. **Donner une expression simple de A^*A. Montrer que l'on peut restreindre A^*A en un opérateur linéaire continu de $L^2(]-1,1[,\mathbb{R})$ dans lui-même.**

   On remarque que pour $f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ et $x \in [-1,1]$, on a par le théorème de Fubini

   $$\begin{aligned} A^*Af(x) &= \int_{-1}^{1} e^{-ixy} \left(\int_{-1}^{1} e^{ity} f(t)dt\right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} e^{it(y-x)}dy\right) f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{e^{i(y-x)} - e^{-i(y-x)}}{i(y-x)} f(t)dt \\ &= 2\int_{-1}^{1} \frac{\sin(y-x)}{y-x} f(t)dt. \end{aligned}$$

   La fonction $\frac{\sin(y-x)}{y-x}$ étant réelle, on peut bien voir cet opérateur comme agissant sur des fonctions à valeurs réelles.

6. **Montrer que $A^*A : L^2((-1,1),\mathbb{R}) \to L^2((-1,1),\mathbb{R})$ est autoadjoint. En déduire qu'il existe une base hilbertienne $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2((-1,1),\mathbb{R})$ et des nombres réels $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $A^*A\psi_k = \mu_k\psi_k$.**

   Le caractère autoadjoint est évident: on a en utilisant les propriétés de l'adjoint vues en cours que $(A^*A)^* = (A^*A^{**}) = A^*A$. De plus, A est compact comme composition de deux opérateurs compacts. Ainsi, il existe une base hilbertienne $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2((-1,1),\mathbb{R})$ et des nombres réels $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $A^*A\psi_k = \mu_k\psi_k$.

7. **Montrer que pour tout $f \in L^2(-1,1)$, $A(f)$ défini sur $\mathbb{C}$ et est une fonction entière (*i.e* holomorphe sur $\mathbb{C}$).**

   On voit bien que l'intégrale $\int_{-1} 1 e^{itz} f(t)dt$ a bien un sens pour tout $z \in \mathbb{C}$. De plus, la fonction $(t,z) \mapsto e^{itz} f(t)$ est mesurable, en tout $t \in]-1,1[$, la fonction $z \mapsto e^{itz} f(t)$ entière, et on peut la majorer par $|e^{itz} f(t)| \leqslant e^{|t\mathrm{Im}(z)|}|f(t)|$, qui est intégrable par produit d'une fonction L^∞ et d'une fonction L^2 (et donc L^1 puisqu'on et sur un intervalle borné). Ainsi, on peut appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe somme et en déduire que Af est holomorphe.

8. **Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_k > 0$.**

   On remarque que
$$||A\psi_k||^2 = \langle A\psi_k, A\psi_k\rangle = \langle A^* A\psi_k, \psi_k\rangle = \mu_k,$$
   donc μ_k est positif ou nul. De plus, $\mu_k = 0$ si et seulement si $A\psi_k = 0$, autrement dit, pour tout $x \in [-1,1]$, on doit avoir
$$\int_{-1}^{1} e^{itx}\psi_k(t)dt = 0.$$
   Par théorème de prolongement analytique des fonctions complexes, ceci est donc vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$, et donc notamment pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on est en train de dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, (on étend f à 0 en dehors de $]-1,1[$)
$$\mathcal{F}(\psi_k(\cdot)1_{]-1,1[}(\cdot))(-x) = 0.$$
   Donc $\mathcal{F}(\psi_k(\cdot)1_{]-1,1[}(\cdot))$ est identiquement nulle, il en est donc de même pour la fonction $\psi_k(\cdot)1_{]-1,1[}(\cdot)$, autrement dit de ψ_k est bien nulle sur $]-1,1[$. Ainsi, 0 ne peut pas être valeur propre.

9. **Pourquoi $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est-elle aussi une base hilbertienne de $L^2((-1,1),\mathbb{C})$?**

   Il suffit de décomposer une fonction complexe en sa partie réelle et imaginaire et appliquer la propriété de base hilbertienne sur la partie réelle et imaginaire. Une autre manière de dire les choses est qu'il suffit de prendre des combinaisons linéaires des fonctions ψ_k avec des coefficients dans $\mathbb{C}$.

10. **En déduire que $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2((-1,1),\mathbb{C})$ qui diagonalise A.**

    On suit l'indication. AA^* se calcule de la même manière qu'à la question 5, on a (en utilisant l'imparité du sinus)
$$\begin{aligned}
AA^* f(x) &= \int_{-1}^{1} e^{ixy}\left(\int_{-1}^{1} e^{-ity} f(t)dt\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} e^{it(y-x)}dy\right)f(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{i(x-y)} f(t)dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(t)dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} \frac{\sin(y-x)}{y-x} f(t)dt \\
&= A^*A(f)(x)
\end{aligned}.$$

    Ainsi, $AA^* = A^*A$. On en déduit que A commute avec A^*A: $A(A^*A) = A^*A^2 = (A^*A)A$. Ainsi, les sous-espaces propres de A^*A sont stables par A. Posons E_k le sous-espace propre associé à μ_k. On a donc un endomorphisme A défini sur un espace de dimension finie E_k (par propriété de cours) qui est normal (il vérifie $AA^* = A^*A$). Ainsi, on sait que A est diagonalisable sur E_k. De plus, si λ est une valeur propre associé au vecteur propre f normalisé, on a $Af = \lambda f$ et donc $\langle Af, Af\rangle = |\lambda|^2$, mais aussi $\langle Af, Af\rangle = \langle A^*Af, f\rangle = \mu_k$. Donc $|\lambda|^2 = \mu_k$ et f est forcément ψ_k. Ainsi, on a bien démontré que A est diagonalisable dans la base hilbertienne $\{\psi_k\}$ et la valeur propre associée λ_k vérifie $|\lambda_k|^2 = \mu_k$. Un dernière étape serait de déterminer explicitement λ_k en fonction de μ_k, mais c'est beaucoup moins évident.