Corrigé du Partiel du 31 octobre 2019

Durée : 2 heures

Vrai ou faux? (2 points)

1. VRAI On a vu en cours qu'un espace de Hilbert de dimension infinie séparable admet une base hilbertienne infinie dénombrable. La réciproque est vraie: si on appelle $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base hilbertienne, alors l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels est dénombrable comme union d'ensemble dénombrable et elle est dense.

2. VRAI En effet, si $x_n \to x$, alors par continuité de la norme associée au produit scalaire, on a $||x_n|| \to ||x||$. Par continuité du produit scalaire, on a aussi $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = ||x||^2$. La réciproque est vraie. Pour le voir, on développe $||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 + ||x||^2 + 2\text{Re}\langle x_n, x\rangle$. Le terme de droite tend vers $||x||^2 + ||x||^2 - 2||x||^2 = 0$, autrement dit $x_n \to x$.

3. FAUX. on a vu en cours que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de H, alors $e_n \rightharpoonup 0$. Or $\langle e_n, e_n\rangle = ||e_n||^2 = 1$ et donc ne tend pas vers 0.

4. VRAI. Pour le faire, on prend d'abord $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Or, pour n suffisamment grand, $(1_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{N}}$ sort du support de φ. Autrement dit, on n grand, on a $\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}\varphi = 0$, et ceci converge donc bien vers 0. Pour conclure dans le cas de $f \in L^2(\mathbb{R})$, on utilise un raisonnement d'approximation classique. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $||f - \varphi||_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon$. On a alors Par Cauchy-Chwartz

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]} f\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}(f-\varphi)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}\varphi\right| \\ &\leqslant (\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}^2)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}}(f-\varphi)^2)^{\frac{1}{2}} + \left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}\varphi\right| \\ &\leqslant ||f-\varphi||_{L^2(\mathbb{R})} + \left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}\varphi\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \left|\int_{\mathbb{R}} 1_{[n,n+1]}\varphi\right|.\end{aligned}$$

Le deuxième terme tendant vers 0 quand $n \to \infty$, il est inférieur à ε pour n suffisamment grand, ce qui conclut la preuve.

Vrai ou faux (2)? (3 points)

1. (1,5 points) $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - bx^3 - cx^5)^2 dx$ est atteint quand (a, b, c) est choisi de telle sorte que $ax + bx^3 + cx^5 = P_{Vect(X,X^3,X^5)}(X^2)$, où $P_{Vect(X,X^3,X^5)}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé $Vect(X, X^3, X^5)$ (car de dimension finie) dans l'espace de Hilbert $L^2(]-1, 1])$. Or il est facile de voir que X^2 est orthogonal à $Vect(X, X^3, X^5)$. En effet, $\langle X^2, X^i\rangle = 0$ dès que i est impair (on intègre un monôme de degré impair, donc une fonction impaire, sur un intervalle symétrique autour de 0). Ainsi, cette projection orthogonale vaut 0. On a donc $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - bx^3 - cx^5)^2 dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$. La réponse est donc NON.

2. (1,5 points) Tout d'abord, il est assez facile de voir que l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de $L^2(]-1, 1[)$ qui est fermé. Par exemple ,si $f_n \to f$ et que tous les f_n sont impairs, il existe une sous-suite $f_{\varphi(n)}$ qui converge presque partout vers f. Le caractère impair est évidemment stable par convergence simple, donc f est impaire. Soit $g \in L^2(]-1, 1[)$ et f une fonction impaire. On sait que g s'écrit sous la forme $g = h + i$ avec h pair et i impair. On a alors

$$\langle g, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 hf + \int_{-1}^1 if = 0 \leftrightarrow \int_{-1}^1 if = 0,$$

où on a utilisé que hf est impaire, donc d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Or cette dernière quantité devant être nulle pour tout f impaire, en choisissant $f = i$, on a

$$\langle g, f \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} i^2 = 0.$$

autrement dit, $i = 0$ presque partout et donc presque partout $g = h$, ce qui signifie que g est nécessairement une fonction paire si elle est dans l'orthogonal des fonctions impaires. Evidemment, toute fonction paire est dans l'orthogonal des fonctions impaires (le produit étant une fonction impaire donc d'intégrale nulle sur $[-1,1]$). La réponse est donc OUI.

Exercice 1 (6,5 points).

1. (0,5 points) T_y est trivialement une forme linéaire. De plus, si $f \in E$, on a

$$|T_y(f)| \leqslant \frac{||f(x_0)|| + ||f(y)||}{x_0 - y} \leqslant \frac{1}{|x_0 - y|} 2||f||_\infty,$$

ce qui prouve bien qu'elle est continue.

2. (1,5 points) Pour appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, il faut trouver, pour tout $f \in F$, un certain $M(f)$ (dépendant de f mais pas de y) tel que pour tout $y \in [0,1]$, on ait $|T_y(f)| \leqslant M(f)$, *i.e.*

$$\left| \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \right| \leqslant M(f).$$

Pour ce faire, on suit l'indication. Par définition de la dérivée en x_0, il existe un certain $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [0,1]$ tel que $|y - x_0| \leqslant \delta$, on ait

$$\left| \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \right| \leqslant 1 + |f'(x_0)|.$$

Maintenant, si $|x - y_0| \geqslant \delta$, on a par le calcul de la première question que

$$|T_y(f)| \leqslant \frac{1}{|x_0 - y|} 2||f||_\infty \leqslant \frac{1}{\delta} ||f||_\infty.$$

On a donc l'inégalité voulue en posant $M(f) = \max(1 + |f'(x_0)|, \frac{1}{\delta}||f||_\infty)$. E étant un Banach, on a donc bien existence d'un certain $M > 0$ tel que pour tout $y \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, on ait $|||T_y|||_{F'} \leqslant \varepsilon$.

3. (0,5 points) Si $x_0 = y$ c'est évident; Sinon, c'est une conséquence immédiate de la question précédente: il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, on ait pour tout f de norme plus petite que 1,

$$|f(x_0) - f(y)| \leqslant M|x_0 - y| ||f||_\infty \leqslant M|x_0 - y|.$$

Ainsi, si on se donne un $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ convient.

4. (2,5 points) Cette question est relativement difficile. Il faut être attentif au fait que M dépend de x_0 dans la question précédente, et donc δ aussi. Pour un x_0 fixé, on note donc $\delta(x_0)$ le δ de la question précédente qui lui correspond. On considère le recouvrement

$$[0,1] \subset \cup_{x_0 \in [0,1]} B\left(x_0, \frac{\delta(x_0)}{2}\right).$$

On peut en extraire un sous-recouvrement fini $B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$ avec $i \in [|1,k|]$. En appliquant la question précédente, pour chaque $i \in [|1,k|]$,

$$|y - x_i| \leqslant \delta(x_i) \Rightarrow |f(y) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon.$$

On pose $\delta = \min_{l \in [|1,k|]} \delta(x_l)$. Soient maintenant $(x,y) \in [0,1]$ tels que $|x - y| < \delta$. Ils appartiennent donc à une même boule $B(x_i, \delta(x_i))$ (on a recouvert $[0,1]$ avec des intervalles de longueur plus grande que δ). On a donc bien que pour tout $f \in B_F$, comme $|x - x_i| \leqslant \delta(x_i)$ et qu'il en est de même pour y,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f(x_i) + |f(x_i) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

5. (1 point) $[0,1]$ est un compact, $\overline{B}_F$ est fermée, bornée et équicontinue (c'est le cas pour B_F mais on étend facilement ceci à $\overline{B}_F$ par un argument d'approximation). On peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela et on en déduit que $\overline{B}_F$ est compacte dans F.

6. (0,5 points) La boule unité fermée est compacte dans E et donc dans F qui est fermé. Par le théorème de Risez, F est nécessairement de dimension finie.

Exercice 2 (13,5 points+2,5 points bonus).

1. (1 point) Soient $(x, y) \in H^2$, on a alors que $Px \perp P^{\perp}y$ et $P^{\perp}x \perp Py$, donc
$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + P^{\perp}y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + P^{\perp}x, Py\rangle = \langle x, Py\rangle.$$
Il en est évidemment de même pour Q.

2. (0,5 points) C'est évident: On a
$$||Qh||^2 = ||PQh + P^{\perp}QH||^2 = ||PQh||^2 + ||P^{\perp}Qh||^2 + 2\langle PQh, P^{\perp}Qh\rangle$$
et le dernier produit scalaire s'annule puisque les deux éléments sont orthogonaux.

3. (1 point) Q étant un projecteur, on a $Q^2 = Q$, donc
$$||PQh|| = ||PQ^2h|| \leqslant |||PQ|||\,||Qh||.$$
On a alors que
$$||P^{\perp}Qh||^2 = ||Qh||^2 - ||PQh||^2 \geqslant ||Qh||^2\left(1 - |||PQ|||^2\right).$$
D'où (ii) avec $c = \sqrt{1 - |||PQ|||^2}$ qui est bien strictement positive car $|||PQ||| < 1$.

4. (1 point) On utilise la question 2, on a alors
$$||Qh||^2 = ||PQh||^2 + ||P^{\perp}Qh||^2 \geqslant c^2||Qh||^2 + ||PQh||^2.$$
Remarquons que cette inégalité implique forcément que $c \leqslant 1$. De plus, en se rappelant qu'on a que $|||Q||| = 1$, on a
$$||PQh||^2 \leqslant (1 - c^2)||Qh||^2 \leqslant (1 - c^2)|||Q||||\!|h|| \leqslant (1 - c^2)||h||^2.$$
Ainsi, $|||PQ||| \leqslant \sqrt{1 - c^2} < 1$ et on en déduit bien que (i) est vérifié.

5. (1 point) C'est un fait bien connu. Comme $|||PQ||| < 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0}(PQ)^k$ converge normalement et donc converge vers un certain élément S. De plus, par téléscopage
$$(Id - PQ)S = PQS - S = \sum_{k\geqslant 0}(PQ)^k - \sum_{k\geqslant 0}(PQ)^{k+1} = Id$$
et de même $S(Id - PQ) = Id$. On en déduit bien que PQ est inversible d'inverse S.

6. (2,5 points)
$$P^{\perp}Q = (I - P)Q = IQ - PQ = Q - PQ^2 = (I - PQ)Q.$$
La suite de la question n'est pas totalement évidente. On sait que $I - PQ$ est une application linéaire inversible d'un Hilbert dans un Hilbert. Par le théorème de l'isomorphisme de Banach, elle est donc continue. On a donc existence de $C > 0$ tel que pour tout $e \in H$, $||(I - PQ)^{-1}e|| \leqslant C||e||$. On applique cette inégalité à $e = (I - PQ)h$. On obtient $||h| \leqslant C||(I - PQ)h||$. D'où le résultat avec $C = \frac{1}{\delta}$. En revenant encore une fois à la question 2, on obtient
$$||PQh||^2 = ||Qh||^2 - ||(I-P)Qh||^2 = ||Qh||^2 - ||(I-PQ)Qh||^2 \leqslant ||Qh||^2 - \delta||Qh||^2 \leqslant (1-\delta)|||Q|||\,||h||^2 \leqslant (1-\delta)||h||^2.$$
On en déduit donc que $\delta \leqslant 1$ et $|||PQ||| \leqslant (1 - \delta) < 1$.

7. (0,5 points) Comme $x \in M \cap N$, on a $Qx = x$ puis $PQx = Px = x$. Donc $(I - PQ)x = 0$, ce qui implique que $x = 0$ puisque $I - PQ$ est inversible.

8. (3 points) Il suffit de montrer que $(I-PQ)x = PQ^{\perp}v = Pv - PQv$. Comme $x \in M$ et $y \in N$, on a $x = Px$ et $y = Qy$. D'où

$$(I-PQ)x = x - PQx = x - PQv + PQy = x - PQv + Py = Px - PQv + PQy = Px + Py - PQv = Pv - PQv.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $M+N$ convergeant vers $v \in H$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n s'écrit sous la forme $v_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in M$ et $y_n \in M$. De plus, on a $x_n = (I-PQ)^{-1}PQ^{\perp}v_n$. L'opérateur $(I-PQ)^{-1}PQ^{\perp}$ étant continu par le théorème de l'isomorphisme de Banach, on en déduit que $x_n \to (I-PQ)^{-1}PQ^{\perp}v$. Cet élément est bien dans P. En effet, pour tout n on a $Px_n = x_n$ et P est un opérateur continu donc on a que $Px = x$, *i.e.* $x \in P$. De plus, on a maintenant que $y_n \to v - x$, avec pour tout n que $Qy_n = y_n$. En faisant $n \to \infty$ on en déduit aussi que $Qy = y$. Ainsi, $v = x + y$ avec $x \in M$ et $y \in N$, et donc que $v \in M+N$. Avec cette question et la précédente, on en déduit que (i)$\Rightarrow$ (iv).

9. (3,5 points) Cette question est difficile. Par définition de L, T est déjà surjective. Reste à montrer qu'elle est injective. Mais si $(x,y) \in Ker(T)$ alors $x \in M$, $y \in N$ et $x = -y$. On a donc que x et y sont dans $M \cap N$, et donc valent tous les deux 0 par hypothèse. T est linéaire continue d'un Banach dans un Banach car L est fermé par hypothèse. Son application réciproque est donc linéaire bornée par le théorème de l'isomorphisme de Banach. On a donc existence de $c > 0$ tel que pour tout $l \in L$, on ait

$$||T^{-1}(l)||_{H\times H} \leqslant ||l||^2.$$

En appliquant ceci à $l = T(x,y)$, on obtient

$$||x+y||^2 \leqslant c^2\left(||T(x,y)||^2\right) \leqslant c\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

On a donc pour $t \in \mathbb{R}$ que

$$||x+ty||^2 = ||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x,y\rangle \leqslant c^2||x||^2 + c^2t^2||y||^2,$$

autrement dit

$$(1-c^2)||x||^2 + (1-c^2)t^2||y||^2 + 2t\langle x,y\rangle \geqslant 0.$$

Le discriminant du polynôme en t doit donc être nul, autrement dit

$$4(\langle x,y\rangle)^2 \leqslant 4(1-c^2)^2||x||^2\,||y||^2.$$

On a donc que pour tout $x \in M$ et tout $y \in N$,

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant (1-c^2).$$

En prenant maintenant $x = Ph$ et $y = Ph'$ avec h et h' quelconques dans H, on obtient

$$|\langle Ph, Qh'\rangle \leqslant (1-c^2)||Ph||\,||Ph'|| \leqslant (1-c^2)||h||\,||h'||,$$

i.e.

$$|\langle h, PQh'\rangle \leqslant (1-c^2)||h||\,||h'||.$$

On conclut grâce à l'indication que $|||PQ||| \leqslant 1-c^2 < 1$.

10. (1,5 points) On peut échanger M et N et donc P et Q dans les hypothèses (i)-(iv), et donc on a bien R' inversible. De l'égalité $RR^{-1} = I$, on tire $R^{-1} = I + PQR^{-1}$. On applique P à droite. $R^{-1}P = P + PQR^{-1}P$. On applique P à gauche.

$$PR^{-1}P = P^2 + P^2QR^{-1}P = P + PQR^{-1}P = R^{-1}P.$$

Le raisonnement est totalement identique pour Q, en échangeant P et Q.

11. (1 point) La relation précédente sur R^{-1} se réécrit comme $(P-I)R^{-1}P = 0$ En utilisant $Px = x$ et $Px \perp P^{\perp}x$, on déduit

$$PV(x,y) = PQ^{\perp}R^{-1}x = Px - PQR^{-1}x = (P-I+R)R^{-1}x = (P-I)R^{-1}x + x = (P-I)R^{-1}Px + x = 0 + x.$$

De même pour $QV(x,y)$ en remplaçant P par Q.

C'est exactement ce que l'on vient de faire: si $(x,y) \in M \times N$, on pose $v = V(x,y)$, on a alors $Pv = x$ et $Qv = y$.