Examen du 17 janvier 2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction.

Durée: 3 heures

Exercice 1. On considère l'espace de Hilbert réel $H = L^2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

On rappelle le théorème suivant, qui est une version faible de la réciproque du théorème de convergence dominée, et que l'on pourra utiliser sans démonstration.

Théorème 1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R})$ (la convergence ayant lieu en norme L^2). Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f.*

On se donne $\alpha < \beta$ deux réels, et on pose

$$C := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tels que } \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta \text{ p.p.}\}.$$

1. Montrer que C est non vide si et seulement si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$. On supposera dorénavant cette condition vérifiée.
2. Montrer que C est un convexe fermé.
3. Calculer la projection orthogonale sur C. *Indication: on essaiera de "deviner" le bon résultat, on vérifiera qu'il est bien dans $L^2(\mathbb{R})$ puis dans C, et enfin que c'est bien la projection orthogonale sur C.*

Exercice 2. On se place dans l'espace $H^1(0,1)$. On munit $H^1(0,1)$ de deux produits scalaires différents:

$$\langle u, v\rangle_1 = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt \quad \text{et } \langle u, v\rangle_2 = \int_0^1 u(t)v(t)dt + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt.$$

1. Justifier rapidement que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ est un produit scalaire. Pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, que reconnaît-on?
2. Montrer que pour tout $u \in H^1(0,1)$, $u^2 \in H^1(0,1)$, puis que pour tout $x \in [0,1]$,
$$u(x)^2 \leqslant u(0)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)^2 dt + 2\int_0^1 u'(t)^2 dt.$$
3. Montrer que les normes associées à ces deux produits scalaires (notées respectivement $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$) sont équivalentes.
4. On fixe $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un unique élément $v_t \in H^1(0,1)$ tel que pour tout $u \in H^1(0,1)$.
$$u(t) = u(0)v_t(0) + \int_0^1 u'(s)v_t'(s)ds,$$
Déterminer explicitement v_t.

Exercice 3. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'espace

$$E = \{u \in H^1(0,1) \text{ telles que } u(0) = a,\ u(1) = b\}.$$

On rappelle que E est un sous-espace affine fermé (grâce à la continuité des applications évaluation en 0 et 1) de $H^1(0,1)$. On considère la fonctionnelle suivante sur l'espace E:

$$J(u) = \int_0^1 \left[u'(x)^2 + u(x)u'(x) + \cosh(u(x))\right] dx.$$

Rappelons les fonctions sinus et cosinus hyperboliques, de classe C^∞ et définies par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.
2. Justifier rapidement que J est une fonctionnelle bien définie sur $H^1(0,1)$ (et donc sur E).
3. (a) Montrer que pour tout $u \in E$, on a $\left|\int_0^1 uu'\right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left[u'(x)^2 + u^2(x)\right] dx\right)$.

   (b) En déduire que pour tout $u \in E$, $J(u) \geq 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx$. On notera $I := \inf_{u\in E} J(u)$, qui est donc fini.
4. On considère une suite minimisante (u_n) pour J. Montrer que la suite (u_n) est bornée dans E.
5. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de (u_n) qui converge faiblement dans E et fortement dans $C^0([0,1])$.
6. Montrer qu'il existe une fonction $\overline{u} \in E$ qui minimise J.
7. Montrer que J est différentiable en tout point de $H^1(0,1)$ et calculer sa différentielle.
8. Montrer que $\overline{u}$ satisfait : pour tout v dans $H_0^1(]0,1[)$,
$$\int_0^1 \left[2\overline{u}'(x)v'(x) + \overline{u}(x)v'(x) + \overline{u}'(x)v(x) + sh(\overline{u}(x))v(x)\right] dx = 0.$$
9. Montrer que $\overline{u} \in C^2([0,1])$ et déterminer une équation pour $\overline{u}$.
10. Si $a = b = 0$, calculer explicitement I, et montrer que $\overline{u}$ est unique.

Exercice 4. On rappelle que l'on munit l'espace $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ du produit scalaire suivant :
$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$
On considère l'opérateur suivant
$$A : f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \mapsto \left(x \mapsto \int_{-1}^1 e^{itx} f(t)dt\right).$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$, on a $A(f) \in C^0([-1,1],\mathbb{C})$. Montrer que A est continu de $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ dans $C^0([-1,1],\mathbb{C})$.
2. Montrer que $A : L^2(]-1,1[,\mathbb{C}) \to C^0([-1,1],\mathbb{C})$ est un opérateur compact.
3. En déduire que A vu comme un opérateur de $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ dans lui-même est un opérateur compact. On s'intéressera maintenant uniquement à cet opérateur.
4. Calculer A^*.
5. Donner une expression simple de A^*A. Montrer que l'on peut restreindre A^*A en un opérateur linéaire continu de $L^2(]-1,1[,\mathbb{R})$ dans lui-même.
6. Montrer que $A^*A : L^2(]-1,1[,\mathbb{R}) \to L^2(]-1,1[,\mathbb{R})$ est autoadjoint. En déduire qu'il existe une base hilbertienne $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(]-1,1[,\mathbb{R})$ et des nombres réels $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $A^*A\psi_k = \mu_k\psi_k$.
7. Montrer que pour tout $f \in L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$, $A(f)$ est défini sur $\mathbb{C}$ et est une fonction entière ($i.e$ holomorphe sur $\mathbb{C}$).
8. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_k > 0$. *Indication: pour exclure le cas $\mu_k = 0$, on pourra utiliser la transformée de Fourier.*
9. Pourquoi $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est-elle aussi une base hilbertienne de $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$?
10. En déduire que $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(]-1,1[,\mathbb{C})$ qui diagonalise A. *Indication: on commencera par montrer que $A^*A = AA^*$, puis on regardera A sur chacun des sous-espaces propres de A^*A.*

    Remarque 1. *On pourrait montrer que les valeurs propres $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ de A vérifient la relation $\lambda_k = i^{k-1}\sqrt{\mu_k}$ (donc une sur 2 est réelle et une sur deux imaginaire pure), mais ceci est nettement plus difficile.*

*

* *