Partiel du 31 octobre 2019

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la précision de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif et pourra éventuellement être légèrement modifié.

Durée: 2 heures

Vrai ou faux? (2 points)
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux (sans justification)? 0.5 point par réponse bonne, -0.5 point par réponse fausse, 0 point si non répondu. Note minimale possible: 0.

1. Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne infinie dénombrable.
2. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de H. Soit $x \in H$. Alors $x_n \to x$ si et seulement si $||x_n|| \to ||x||$ et $\langle x_n, x\rangle \to ||x||^2$.
3. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel ou complexe. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de H. On suppose qu'il existe $x \in H$ et $y \in H$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$. Alors on a nécessairement $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.
4. $(1_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{N}} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Vrai ou faux (2)? (3 points) Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes. En cas de réponse positive, donner une démonstration. En cas de réponse négative, donner un contre-exemple précis. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de points. Pas de points négatifs.

1. $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^2 - ax - bx^3 - cx^5)^2 dx = \frac{1}{5}$.
2. On pose $H = L^2(]-1,1[,\mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel. L'orthogonal de l'ensemble des fonctions de H impaires est l'ensemble des fonctions de H paires.

Exercice 1 (6 points)**.** Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $E = (C^0([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ ne contenant que des fonctions dérivables sur $[0,1]$. On souhaite montrer que F est de dimension finie. Soit $x_0 \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ avec $y \neq x_0$. On définit

$$T_y : f \in E \mapsto \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}.$$

On admettra le théorème de Banach-Steinhaus (vu en TD): si E et F sont des espaces de Banach et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$ vérifiant: pour tout $x \in E$, il existe $c(x) \geqslant 0$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $||A_i x||_F \leqslant c(x)$, alors il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $i \in I$, $|||A_i||| \leqslant c$.

1. Montrer que T_y est une forme linéaire continue sur E.
2. On appelle encore T_y la restriction de T_y à l'espace F. On notera $|||T_y|||_{F'}$ la norme d'opérateur quand l'espace de départ est F. En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe M (dépendant de x_0) tel que pour tout $y \in [0,1] \setminus \{x_0\}$, on ait $|||T_y|||_{F'} \leqslant M$. *Indication: on pourra distinguer ce qui se passe pour y proche de x_0 en utilisant $f'(x_0)$, puis pour y loin de x_0.*
3. On appelle B_F la boule ouverte unité dans F (muni de la norme de E). Montrer que B_F est équicontinue en x_0, au sens suivant: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (dépendant de x_0) tel que pour tout tout $f \in B_F$ et tout $y \in [0,1]$ vérifiant $|x_0 - y| \leqslant \delta$, on ait $|f(x_0) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
4. En utilisant la question précédente et en recouvrant $[0,1]$ par un nombre fini de boules de taille bien choisie, montrer que B_F est équicontinue (au sens donné en cours) sur $[0,1]$.

5. En déduire que $\overline{B}_F$ est compacte dans E.
6. Conclure.

Exercice 2 (11 points)**.** Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de H. On pose respectivement P et Q la projection orthogonale sur M et N. Pour simplifier les notations, on notera $P^\perp$ et $Q^\perp$ les projections orthogonales respectivement sur $M^\perp$ et $N^\perp$. On rappelle que $P^\perp = I - P$ et $Q^\perp = I - Q$ (I étant l'application identité sur H). Pour A une application linéaire continue de H dans H, on pourra utiliser sans démonstration l'identité suivante:

$$|||A||| = \sup_{||x||\leqslant 1,\, ||y||\leqslant 1} |\langle Ax, y\rangle|.$$

1. Montrer que pour tout $(x,y)\in H^2$, on a $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$. Que dire pour Q?
2. Montrer que pour tout $h \in H$, on a $||Qh||^2 = ||PQh||^2 + ||P^\perp Qh||^2$. *Cette identité pourra être largement utilisée par la suite.*

On s'intéresse aux propriétés suivantes:

(i) $|||PQ||| < 1$.

(ii) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $y \in N$, on ait $||P^\perp y|| \geqslant c||y||$.

(iii) $I - PQ$ est inversible.

(iv) M et N sont en somme directe et $M + N$ est fermé.

Le but de l'exercice est de montrer que toutes ses propriétés sont équivalentes.

3. Démontrer que pour tout $h \in H$, on a
$$||PQh|| \leqslant |||PQ|||\, ||Qh||.$$
En utilisant la question 2, en déduire que (i) $\Rightarrow$ (ii).
4. On suppose que (ii) est vérifié. Montrer que pour tout $h \in H$, on a
$$||Qh||^2 \geqslant c^2||Qh||^2 + ||PQh||^2.$$
En déduire que (ii) $\Rightarrow$ (i).
5. Montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii).
6. Montrer que $P^\perp Q = (I - PQ)Q$. On suppose (iii) vérifiée. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in H$, on ait $||(I - PQ)h||^2 \geqslant \delta||h||^2$. En déduire que (iii) $\Rightarrow$ (i).
A ce stade-là, on a donc démontré les équivalences entre les propriétés (i) à (iii).
7. On suppose que (i) est vérifié. Soit $x \in M \cap N$. Que vaut PQx? En déduire que $M \cap N = \{0\}$.
8. On suppose que (i) est vérifié. Soit $v \in M + N$ que l'on écrit sous la forme $v = x + y$ avec $x \in M$ et $y \in N$. Montrer que $x = (I - PQ)^{-1}PQ^\perp v$. En déduire que $M + N$ est fermé, puis que (i) $\Rightarrow$ (iv).
9. On suppose que (iv) est vérifié. Soit $T : M \times N \to H$ l'opérateur borné donné par $T(x,y) = x + y$. On pose $L = Im(T)$. On munit $M \times N$ du produit scalaire $\langle (x,y),(x',y')\rangle_{M\times N} = \langle x,y\rangle + \langle x',y'\rangle$, qui fait de $M \times N$ un espace de Hilbert. Montrer que T est une bijection de $M \times N$ sur L. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in M$ et $y \in N$, on ait $||x+y||^2 \geqslant c^2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$. En appliquant ceci à ty à la place de y pour tout $t \in \mathbb{R}$, en déduire que $|\langle x,y\rangle| \leqslant (1-c)||x||\,||y||$, puis conclure que (iv) $\Rightarrow$(i).

Questions bonus (2,5 points): On suppose dorénavant que P et Q vérifient n'importe laquelle des conditions précédentes. On pose $R = I - PQ$ et $R' = I - QP$.

10. Expliquer en quelques mots pourquoi R' est aussi inversible. Montrer que $PR^{-1}P = R^{-1}P$ et $Q(R')^{-1}Q = (R')^{-1}Q$.
11. On pose $V : (x,y) \in M \times N \to Q^\perp R^{-1}x + P^\perp(R')^{-1}y \in H$. Montrer que pour tout $(x,y) \in M\times N$, on a $PV(x,y) = x$ et $QV(x,y) = y$.
En déduire que l'application $v \in H \mapsto (Pv, Qv) \in M \times N$ est surjective.

*

* *