TD 1: Compacité dans les espaces fonctionnels

Exercice 1 (Réciproque du Théorème d'Ascoli-Arzéla)**.** Dans cet exercice, on se propose de montrer la réciproque du théorème d'Ascoli-Arzéla. Soit (K, d) un espace métrique compact et A une partie de $C^0(K, \mathbb{R})$ qui soit compacte. On sait déjà que A est fermée et bornée, reste à montrer qu'elle est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $(h_1, \dots h_s) \in A^s$ (avec $s \in \mathbb{N}^*$) tels que $A \subset \bigcup_{i\in[|1,\dots,s|]} B(h_i, \varepsilon)$.

2. Montrer que pour tout $i \in |[1, s|]$, il existe $\alpha_i > 0$ tel que pour tous $(x, y) \in K^2$, on ait
$$d(x, y) \leqslant \alpha_i \Rightarrow |h_i(x) - h_i(y)| \leqslant \varepsilon$$

3. On pose $\alpha = \min_{i\in[|1,s|]} \alpha_i$. Montrer que pour tous $(x, y) \in K^2$,
$$d(x, y) \leqslant \alpha \Rightarrow \forall f \in A,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon.$$
Conclure.

Exercice 2.

1. (*Lemme des sous-sous-suites.*) Soit (X, d) un espace métrique, x un élément de X et (x_n) une suite d'éléments de X, telle que pour toute sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n), il existe une sous-sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers x. Montrer que toute la suite (x_n) converge vers x. (On pourra raisonner par l'absurde.)

2. Soit $K > 0$ une constante fixée. Soit (f_n) une suite de fonctions K-lipschitiziennes sur $[0, 1]$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f. Montrer qu'elle converge uniformément vers f. Est-ce vrai sans l'hypothèse que les fonctions soient K-Lipschtiziennes?

Exercice 3. Soit (K, d) un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions $k-$Lipschitziennes (avec $k \geqslant 0$). On suppose qu'il existe $x_0 \in K$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée. Montrer que l'on peut en extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente vers une fonction aussi $k-$Lipschtitzienne.

Exercice 4 (Arcs rectifiables)**.** On appelle arc rectifiable de $\mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une partie C de $\mathbb{R}^N$ qui est l'image d'une application Lipschtizienne sur le segment $[0, 1]$: il existe une applciation Lipschtzienne $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ telle que $c([0, 1]) = C$. On appelle longueur de l'arc rectifiable C, noté $l(C)$, la borne inférieure des constantes de Lipschitz des fonctions Lipschtiziennes $c : [0, 1] \to C$ surjectives. Montrer que cet infimum est en fait un minimum.

Exercice 5 (Espaces de Hölder)**.** Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. On introduit l'espace $C^\alpha(K; \mathbb{R})$ des fonctions höldériennes d'indice $\alpha \in]0, 1[$ comme l'ensemble des fonctions de $C(K; \mathbb{R})$ telles que
$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in K,\ |f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^\alpha.$$
(Cet espace est aussi parfois noté $C^{0,\alpha}(K; \mathbb{R})$.) Pour $f \in C^\alpha(K; \mathbb{R})$, on introduit la quantité $\|f\|_\alpha$ de la manière suivante :
$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in K^2, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $C^\alpha(K; \mathbb{R})$.

2. Montrer que si $\alpha > \beta$, $C^\alpha(K, \mathbb{R}) \subset C^\beta(K, \mathbb{R})$.

3. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1]$, $C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \subset C^\alpha([0, 1]; \mathbb{R})$. (Ici $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continûment dérivables dans $[0, 1]$).

4. Déterminer une fonction dans $C^{1/2}([0, 1]; \mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $C^\alpha([0, 1]; \mathbb{R})$ pour $\alpha > 1/2$.

5. Montrer que cette norme munit $C^\alpha(K, \mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Banach.

6. Démontrer que la boule unité de $C^\alpha(K,\mathbb{R})$ est relativement compacte dans $C^0(K,\mathbb{R})$, i.e. son adhérence est compacte.

7. L'espace $C^\alpha([0,1],\mathbb{R})$ est-il fermé dans $C([0,1];\mathbb{R})$?

Exercice 6 (Théorème de Cauchy-Peano)**.**
Le but de cet exercice est d'établir le théorème suivant :

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ et f une application continue de $]-T,T[\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $y_0 \in \Omega$, il existe $\tau \in]0,T[$ et une application $y \in C^1([-\tau,\tau];\Omega)$ solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Comparer cet énoncé avec le théorème usuel de Cauchy-Lipschitz.

2. Soit $\overline{B}(y_0;R)$ une boule fermée incluse dans Ω, centrée en y_0 de rayon R. Soit $M > 0$ un majorant de $|f(t,x)|$ sur $[-T/2,T/2]\times\overline{B}(y_0;R)$. Expliquer pourquoi on peut effectivement introduire ces objets.

3. On introduit
$$\tau =: \min(T/2, R/M).$$
Soit $d \in]0,\tau[$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (y,z) avec
$$y \in C^0(]-\infty;\tau];\mathbb{R}^n) \text{ et } z \in C^0([0;\tau];\mathbb{R}^n),$$
satisfaisant les relations suivantes :
$$y(t) = y_0 \text{ pour tout } t \in]-\infty, 0],$$
$$z(t) = y(t-d) \text{ pour tout } t \in [0,\tau],$$
$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, z(s))ds \text{ pour tout } t \in [0,\tau].$$
Indication : on cherchera d'abord à définir z sur $[-\tau, d]$, puis y sur $[0,d]$, etc.

4. Montrer que les fonctions y et z introduites précédemment sont à valeurs dans $\overline{B}(y_0;R)$.

5. Soit (y_n) la suite obtenue en considérant la restriction à $[0,\tau]$ de la fonction y obtenue précédemment pour $d = 1/n$. Cette suite est donc définie pour n assez grand. Montrer que la suite (y_n) satisfait pour un certain K indépendant de n :
$$|y_n(t) - y_n(s)| \leq K|t-s| \text{ pour } s,t \in [0,\tau].$$

6. Montrer que l'on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite convergente dans $C^0([0,\tau];\mathbb{R}^d)$.

7. Conclure.

8. Une telle solution est-elle nécessairement unique ? (Utiliser $f(t,x) = \sqrt{|x|}$.)

Exercice 7. Soit $p \in [1,\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$. On souhaite montrer que $||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quand $h \to 0$.

1. On suppose de plus que $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quand $h \to 0$.

2. En utilisant un argument de densité, conclure.

Exercice 8. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$); Soit B un borné de $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p < \infty$. On pose $F = f * B$. Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $F_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Exercice 9 (Réciproque du corollaire de Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** Soit $p \in [1,\infty[$ et F un sous-ensemble de $L^p(\mathbb{R}^N)$, $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose F compact dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$, $\exists \delta \in]0, d(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)[$, tels que $||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} \leqslant \varepsilon$. *Indication: on pourra utiliser la précompacité de F et l'exercice 7.*

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $||f||_{L^p(\Omega\setminus\omega)}$, $\forall f \in F$. *Indication: on pourra utiliser la précompacité de F.*