TD 3: Théorème de Baire et de l'application ouverte.

Exercice 1. 1. Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que E n'admet pas de base algébrique dénombrable infinie.

2. Existe-il une norme qui rend $\mathbb{R}[X]$ complet?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de dimension $p < n$. Montrer que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq E.$$

Exercice 3 (Théorème de Banach-Steinhaus, et quelques conséquences)**.** Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (pas forcément dénombrable) d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un certain $c(x) \geqslant 0$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $||A_i(x)|| \leqslant c(x)$. Montrer qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $i \in I$ et tout $x \in E$, on ait $||A_i(x)|| \leqslant c||x||$.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'opérateurs bornés telle que pour tout $x \in E$, $T_n x$ vers une certaine limite notée Tx. Montrer que $\sup_n |||T_n||| < \infty$, $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $|||T||| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |||T_n|||$. A-ton forcément $|||T_n - T||| \to 0$? *Indication: on pourra penser à l'opérateur de translation dans L^p.*

3. Soient E, F, G trois espaces de Banach. On considère une forme bilinéaire $a : E \times F \to \mathbb{G}$. On suppose que F est un espace de Banach. Démontrer que a est continue si et seulement si elle est séparément continue, *i.e.* pour tout $x \in E$, on a $y \mapsto a(x,y)$ est continue et pour tout $y \in F$, $x \mapsto a(x,y)$ est continue.

   Est-ce encore vrai si on ne suppose pas que F est un Banach? *Indication: On pourra considérer $E = F = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P|| = \int_0^1 |P|$, et $G = \mathbb{R}$, et trouver une application bilinéaire qui convienne.*

4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $||\cdot||$ une norme sur $C^0(K,\mathbb{R})$. On suppose que la propriété suivante est vérifiée: si $f_n \to f$ pour $||\cdot||$ dans $C^0(K,\mathbb{R})$, alors f_n converge simplement vers f. Montrer que $||\cdot||$ est équivalente à la norme de la convergence uniforme.

Exercice 4 (Théorème de la limite simple de Baire et application)**.** 1. Soit E un espace de Banach et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fermés de E tels que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense de E. *Indication: On pourra poser $U = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F}_n$ et considérer $G_n = F_n \cap (E \setminus U)$.*

2. Soient E et F deux espaces de Banach, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues de E dans F. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_{k,n} = \{x \in E | \forall (p,q) \geqslant n, ||f_p(x) - f_q(x)|| \leqslant \frac{1}{k}\}.$$

   Montrer que $F_{k,n}$ est fermé et que $U_k = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathring{F}_{k,n}$ est un ouvert dense de E.

   En déduire que f est continue sur un ensemble dense de E.

3. Soit $f \in C(\mathbb{R})$ dérivable partout. Montrer que f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Densité des fonctions continues nulle part dérivables)**.** On se place dans l'espace $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 1$. On considère le sous-ensemble suivant

$$U_{n,\varepsilon} = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \text{tels que } \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1] \text{ tel que } 0 < |x-y| < \varepsilon \text{ et } \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} > n.$$

1. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $E \setminus U_{n,\varepsilon}$ qui converge uniformément vers une fonction f de E.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in [0,1]$ tel que pour tout $y \in [0,1]$, on ait $|x_k - y| \geqslant \varepsilon$ et $\frac{|f(x_k)-f(y)|}{|x_k-y|} \geqslant n$.

(b) Montrer qu'il existe une sous-suite de (x_k) qui converge vers un certain $\overline{x} \in [0,1]$. Soit $y \in [0,1]$. On pose $y_k = \min(\max(x_k + y - \overline{x}, 0), 1)$. Montrer que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $[0,1]$ qui converge vers y, vérifiant de plus que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|y_k - x_k| < \varepsilon$.

(c) Montrer que $f \in E \setminus U_{n,\varepsilon}$.

(d) En déduire que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

2. Soit $f \in E$ et $\delta > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $P_\delta \in \mathbb{R}[X]$ tel que $||f - P_\delta||_\infty \leqslant \delta$.

(b) Soit $\alpha > 0$. Posons
$$f_{\delta,\alpha} : x \mapsto P_\delta(x) + \delta \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$
Démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que que pour tout $\alpha > 0$ suffisamment petit, pour tout $x \in [0,1]$, il existe $y \in [0,1]$ tel que
$$\frac{|f_{\delta,\alpha}(x) - f_{\delta,\alpha}(y)|}{[x-y|} \geqslant \frac{2\delta}{\alpha\pi} - M.$$

(c) En déduire que pour α suffisamment petit, $f_{\delta,\alpha} \in U_{\varepsilon,n}$, puis que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

3. En déduire que l'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dense dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme infinie.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach, G et H deux sous-espaces vectoriels fermés de de E tels que $G+H$ est fermé.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que tout $z \in G+H$ admet une décomposition de la forme $z = g + h$ avec $||g|| \leqslant C||z||$ et $||h|| \leqslant C||z||$.

2. En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $d(x, G\cap L) \leqslant C'(d(x,G) + d(x,L))$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $f(kx)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Alors f est bornée. *Indication: Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduira l'ensemble*
$$F_N = \{x \in \mathbb{R}, \sup_{k\geqslant 1} |f(kx)| \geqslant N\},$$
on montrera qu'il existe un des F_N d'intérieur non vide, puis on trouvera $A > 0$ tel que f est bornée sur $[A,\infty[$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $f(kx)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Alors $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. *Indication: Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduira l'ensemble*
$$F_n = \{x \in \mathbb{R}, \forall p \geqslant n, |f(px)| \leqslant \varepsilon\},$$
et on montrera qu'il existe un des F_n d'intérieur non vide, puis on trouvera $A > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ sur $[A,\infty[$.

Exercice 9. Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $T^{n_x}x = 0$ (le produit étant au sens de la composition). Montrer que T est nilpotente: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$. Ce résultat reste-il vrai si E n'est pas un espace de Banach?

Exercice 10 (Théorème du graphe fermé et quelques conséquences)**.** Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que est est continu si et seulement si le graphe de A est fermé. *Indication: pour le sens réciproque, on introduira la norme $N(x) = ||x|| + ||Ax||$.*

2. Soit H un espace de Hilbert réel et A un endomorphisme de H. On suppose que pour tout $x \in H$, $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$. Montrer que A est continu. *Indication: si $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$, montrer que pour tout $h \in H$, $\langle y+Th, x+h\rangle \geqslant 0$.*

3. Soit G un sous-espace vectoriel de E. On munit G d'une certain norme $||\cdot||_G$, de telle sorte que $(G, ||\cdot||_G)$ soit un espace de Banach. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in G$, on ait $||x||_E \leqslant C||x||_G$. Montrer que si $T \in \mathcal{L}_c(E)$ est une application linéaire continue telle que G est stable par T, alors $T_{|G}$ est aussi continue pour la norme $||\cdot||_G$.

4. Soit H un espace de Hilbert réel et A un endomorphisme de H. On suppose que pour tout $x \in H$, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Montrer que A est continu.

Exercice 11. Soit E un espace de Banach, soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E,*i;e.* tels que $E = F \bigoplus G$. On considère P_F (resp. P_G) la projection sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. à F). Montrer que P_F et P_G sont continues si et seulement si F et G sont fermés.