TD 5: Spectre d'un opérateur compact

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}_c(H)$ qui commute avec tous les opérateurs compacts sur H. Montrer que A est une homothétie.

Exercice 2. Pour un opérateur autoadjoint compact A sur un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable H, exprimer $|||A|||$ à l'aide du spectre de A.

Exercice 3. Soit T un opérateur compact autoadjoint sur un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable H et S un autre opérateur autoadjoint qui commute avec T. Montrer qu'il existe une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que chaque e_i est en même temps un vecteur propre de S et de T.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable et A un opérateur compact autoadjoint. Soit $g \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur μ pour que l'équation

$$f - \mu A f = g$$

admette une unique solution f dans H. Dans ce cas, exprimer "explicitement" f à l'aide d'une série.

Exercice 5. Que dire d'un opérateur compact autoadjoint sur un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable dont le spectre est réduit à $\{0, 1\}$?

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert réel et $A \in K(H)$.

1. Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que si $\inf_{||h||=1} ||(A - \lambda I)h|| = 0$, alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.
2. En déduire que soit $|||A||| \in \sigma_p(A)$, soit $-|||A||| \in \sigma_p(A)$.

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable et A un opérateur autoadjoint compact. Montrer qu'il existe des opérateurs compacts autoadjoints positifs B et C tels que $A = B - C$ et $BC = CB$. A-t-on unicité de cette décomposition?

Exercice 8 (Calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints compacts)**.** Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie séparable et $A \in K(H)$ un opérateur compact autoadjoint. On note $(\lambda_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ses éléments propres. Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(A) : x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in H \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi(\lambda_i) e_i \in H.$$

1. Montrer que $\varphi(A)$ est bien définie, à valeurs dans H.
2. Montrer que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(A)$ est linéaire et multiplicative, au sens où si ψ est une autre fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$, on a $(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$.
3. Donner une CNS sur φ pour que $\varphi(A) = Id$. Donner une CNS sur φ pour que $\varphi(A) = A$.
4. Montrer que $||\varphi(A)|| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\varphi(\lambda)|$.
5. Montrer que $\varphi(A)^* = \varphi(A)$.
6. Si $B \in \mathcal{L}_c(H)$ vérifie $AB = BA$, montrer que $B\varphi(A) = \varphi(A)B$.
7. Soit A un opérateur compact autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un unique opérateur B compact autoadjoint positif tel que $A^2 = B$. B est-il unique dans la classe $\mathcal{L}_c(H)$?

Exercice 9. Soit $H = L^2(0, 1)$. Soit $f \in L^2(0, 1)$. On considère l'opérateur de Volterra $T : f \in H \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Montrer que TT^* est compact autoadjoint et le diagonaliser.

Exercice 10. Soit $H = L^2(0,1)$.

1. Montrer que pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in C^1([0,1])$ tel que
   - $u(0) = u(1) = 0$,
   - u est une double primitive de f, c'est-à-dire une primitive d'une primitive de f.

   On notera $u = A(f)$.
2. Montrer que A est un opérateur borné sur H.
3. Montrer que A est compact.
4. Montrer que A est autoadjoint.
5. Diagonaliser A (c'est-à-dire, déterminer une base hilbertienne de vecteurs propres.)

Exercice 11 (Opérateurs de Fredholm)**.** Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $A \in \mathcal{L}_c(H)$. On dit que A est un opérateur de Fredholm si Ker(A) est de dimension finie et $Im(A)$ est de codimension (*i.e.* la dimension de n'importe quel supplémentaire de $Im(A)$) finie.

1. On suppose d'abord que A est injectif. Soit F un supplémentaire de A, supposé de dimension finie n, et $(y_1, \dots y_n)$ une base de F. On définit l'opérateur $T : H \times \mathbb{R}^n \to H$ donné par
$$T(x, (v_1, \dots v_n)) = Ax + \sum_{i=1}^{n} v_i y_i.$$
   Montrer que T est continu et bijectif. En déduire que $Im(A)$ est fermée.
2. On ne suppose plus que A est injectif. Montrer que $Im(A)$ est fermée.

Dans toute la suite, on appelle indice de A, et on note $Ind(A)$ la quantité
$$Ind(A) = dim(Ker(A)) - codim(Im(A)).$$

3. Exprimer $Ind(A)$ uniquement à l'aide de $Ker(A)$ et $Ker(A^*)$.
4. Quel opérateurs de Fredholm d'indice 0 avons-nous vu en cours?
5. On suppose que H se décompose sous la forme $H = F_1 \bigoplus F_2$ et $H = G_1 \bigoplus G_2$, où F_1, F_2, G_1, G_2 sont des sous-espaces vectoriels fermés. On considère $A \in \mathcal{L}_c(H)$ que l'on peut écrire “par blocs”, au sens où
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & X \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$
   avec $A_i : F_i \to G_i$ et $X : F_2 \to G_1$. Si A_1 est inversible et que F_2 et G_2 sont de dimension finie, montrer que A et de Fredholm et $Ind(A) = dim(F_2) - dim(G_2)$.
6. Soit $B \in \mathcal{L}_c(H)$ un autre opérateur de Fredholm. Démontrer que $Ind(AB) = Ind(A)Ind(B)$.
7. Montrer que A est de Fredholm si et seulement si A^* est de Fredholm, et donner une formule reliant l'indice de A à l'indice de A^*.
8. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donner un opérateur de Fredholm d'indice n dans $l^2(\mathbb{N}^*)$.
9. Dans $H = l^2(\mathbb{N}^*)$, on considère l'opérateur de shift à droite, noté T. Existe-t-il $S \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $S^2 = T$?
10. Montrer que si A est un opérateur de Fredholm et B est un opérateur compact, alors $A + B$ est un opérateur de Fredholm de même indice que A.
11. Soient A_1 et A_2 deux opérateurs de Fredholm sur H. On introduit l'opérateur
$$(A_1 \times A_2) : (x, y) \in H \times H \mapsto (A_1 x, A_2 y) \in H \times H,$$
    où $H \times H$ est muni de son produit scalaire produit canonique. Montrer que $A_1 \times A_2$ est un opérateur de Fredholm et calculer son indice en fonction de ceux de A_1 et A_2.