TD 6: Espaces $W^{1,p}$ et problèmes elliptiques linéaires $1D$

Exercice 1. Quelles sont les fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telles que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f\varphi^{(k)} = 0$?

Exercice 2. 1. Soit $I =]-1,1[$. Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $H^1(I)(= W^{1,2}(I))$?

(i) $a(x) = |x|$, (ii) $b(x) = 0$, si $x \leq 0$, 1 sinon, (iii) $c(x) = x^\alpha$ si $x \geq 0$, 0 sinon, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soit $I =]0,1[$, et $1 \leq p \leq +\infty$. Pour quelles valeurs de p les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $W^{1,p}(I)$?

(i) $d(x) = |2x-1|$, (ii) $e(x) = x^\beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$, (iii) $f(x) = |\ln(x)|^\gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Une caractérisation de $H^1(I)$)**.** Soit $I :=]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Pour tout $0 < \alpha < (b-a)/2$, on note $I_\alpha :=]a+\alpha; b-\alpha[$.

1. (i) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([a;b])$, alors pour tout α comme ci-dessus,

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq h^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2 ds \qquad \forall x \in I_\alpha,\ \forall h \in \mathbb{R},\ |h| < \alpha\ .$$

(ii) En déduire que pour toute fonction $u \in H^1(I)$, tout intervalle I_α et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq \|u'\|_{L^2(I)},$$

où $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

2. Réciproquement, on suppose que $u \in L^2(I)$ est telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I_α et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq C\ .$$

(i) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et $\alpha > 0$ tel que ϕ a un support dans I_α. Montrer que, si $|h| < \alpha$,

$$\int_{I_\alpha} (u(x+h) - u(x))\phi(x)dx = \int_I u(x)(\phi(x-h) - \phi(x))dx\ .$$

En déduire que

$$\left| \int_I u(x)\phi'(x)dx \right| \leq C\|\phi\|_2\ .$$

On pose $T(\phi) = \displaystyle\int_I u(x)\phi'(x)dx$ pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

(ii) Soit $\phi \in L^2(I)$. Montrer que, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ qui converge vers ϕ, alors la suite $(T(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(iii) En utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $L^2(I)$, montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue Φ sur $L^2(I)$ telle que

$$\Phi(v) = \int_I u(x)v'(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(I)\ .$$

(iv) En conclure que $u \in H^1(I)$.

Exercice 4. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $p \in]1,\infty]$ et p' son exposant conjugué.

1. Démontrer que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, on a existence de $C > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \overline{I}^2$, on ait

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^{\frac{1}{p'}}.$$

   (Un telle fonction est dite $1/p'$−Hölderienne.)

2. Pour $p < \infty$ et $I = [0, 1]$, exhiber une fonction $1/p'$-Hölderienne qui ne soit pas dans $W^{1,p}(I)$.

3. Pour $p = +\infty$, quel résultat obtient-t-on?

On souhaite maintenant démontrer que $W^{1,\infty}(I)$ est exactement l'ensemble des fonctions Lipschtiziennes ET bornées (ce dernier point étant évident) sur $\overline{I}$. Pour ce faire, on admettra le résultat (difficile) suivant, appelé théorème de Rademacher: toute fonction Lipschitizienne est dérivable presque partout. Soit u une fonction Lipschtizienne bornée sur $\overline{I}$. On appelle v sa dérivée (presque partout).

4. Démontrer que $v \in L^\infty(I)$.

5. Démontrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$, on a

$$\int_I \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \varphi(x)dx \to \int_I v\varphi \text{ quand } h \to 0.$$

6. Soit $\varphi \in C_c^\infty(I)$. En réécrivant d'une autre manière $\int_I \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \varphi(x)dx$, montrer que cette quantité tend aussi vers $-\int_I u\varphi'$.

7. En déduire que $u \in W^{1,\infty}(I)$ et que $u' = v$ p.p.

Exercice 5. Soit I un intervalle. Montrer le théorème de densité suivant: soit $p \in [1, \infty[$. Pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C^\infty(I)$ telle que: pour tout segment $K \subset \overline{I}$, on a $u_n \to u$ en norme $|| \cdot ||_{\infty,K}$ et $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(K)$. *Indication: utiliser la densité dans les espaces L^p et le théorème du représentant continu.*

Exercice 6 (escalier du diable et espaces de Sobolev)**.** On se place sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose $K_0 = [0, 1]$, puis K_1 comme étant K_0 auquel on retire l'intervalle ouvert central de longueur $1/3$, *i.e.* $K_1 = [0, 1/3] \cap [2/3, 1]$. Supposons construits par récurrence K_n. On construit alors K_{n+1} comme étant K_n auquel on prive chacun de ses segments de l'intervalle ouvert central de longueur $1/3$ du segment. On pose $K = \bigcap_1^\infty K_n$.

1. Donner K_2, K_3.

2. Donner une relation entre la mesure de K_{n+1} et la mesure de K_n. En déduire la mesure de K_n.

3. Montrer que K est un ensemble mesurable de mesure nulle.

On pose $f_0(x) = x$, puis $f_1(x)$ une fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $1/2$ sur $[1/3, 2/3]$. Supposons $f_2, \ldots f_n$ construit. On définit alors f_{n+1} comme suit: sur tout intervalle [c,d] où f_n n'est pas constante, on remplace f_n par la fonction continue affine par morceaux qui vaut $\frac{f(c)+f(d)}{2}$ sur l'intervalle $[c + \frac{d-c}{3}, c + \frac{2(d-c)}{3}]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-n}$. En déduire que f_n converge uniformément vers une certaine fonction f continue, croissante, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

5. Montrer que f est dérivable presque partout, de dérivée presque partout nulle.

6. Soit $p \in [1, \infty]$. A-t-on $f \in W^{1,p}(I)$? Est-ce en contradiction avec les résultats du cours?

Exercice 7 (Fonctions absolument continues et espace $W^{1,1}$)**.** Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. f est dite absolument continue sur $\overline{I}$ si la propriété suivante est vérifiée: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $]a_k, b_k[$ de $\overline{I}$ (avec $k \in [|1, K|]$ pour un certain $K \geqslant 1$), on ait

$$\sum |a_k - b_k| \leqslant \delta \Rightarrow \sum |f(a_k) - f(b_k)| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute fonction absolument continue est continue. La réciproque est-elle vraie?

2. Montrer que toute fonction $u \in W^{1,1}(I)$ est absolument continue.

3. Inversement, on souhaiterait montrer que toute fonction absolument continue sur $\overline{I}$ est dans $W^{1,1}(I)$. Pour ce faire, on va admettre le théorème (difficile) suivant: toute fonction absolument continue est dérivable presque partout. Montrer alors le résultat voulu.

Exercice 8. On considère l'espace $H^1(0,\infty)$, ainsi que l'application $v \in H^1(0,\infty) \mapsto ||v'||_{L^2(0,\infty)}$. Montrer que c'est une norme. Est-elle équivalente à la norme H^1 usuelle?

Exercice 9 (Inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger)**.** On considère $a < b$ deux réels et $I =]a,b[$, et $p \in [1,\infty]$. Pour $u \in L^1(a,b)$, on pose $vm(u) := \frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)dt$.

1. Pour $p = 2$, démontrer l'inégalité de Poincaré suivante: pour tout $u \in H_0^1(0,\pi)$, on a

$$||u||_{L^2(0,\pi)} \leqslant ||u'||_{L^2(0,\pi)}.$$

   On pourra considérer une base hilbertienne bien choisie de $L^2(0,\pi)$. Montrer que cette inégalité est optimale au sens qu'il existe des fonctions telles qu'on ait égalité dans cette inégalité, et trouver toutes les fonctions vérifiant cette égalité.

2. Donner un résultat analogue sur l'intervalle $I =]a,b[$.

3. Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger: il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, on ait

$$||u - vm(u)||_{L^p(a,b)} \leqslant C||u'||_{L^p(a,b)}.$$

Exercice 10 (Inégalité de Nash, 1958)**.** On souhaite démontrer l'inégalité de Nash: il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$, on ait

$$||f||^3_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C||f||^2_{L^1(\mathbb{R})}||f'||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On notera $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f. On considère un certain $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$||\widehat{f}||_\infty \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2. Exprimer $||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}$ à l'aide de $\widehat{f}$.

3. Soit $R > 0$. Démontrer que

$$||\widehat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2R||\widehat{f}||^2_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{2\pi}{R^2}||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

4. En choisissant un $R > 0$ adéquat, conclure. *Indication: on pourra choisir R en fonction de $||f||_{L^1(\mathbb{R})}$ et $||f'||_{L^2(\mathbb{R})}$ à certaines puissances, et ajuster correctement les puissances.*

Exercice 11. Soit $p \geqslant 1$. On se demande s'il est possible d'avoir une inégalité de la forme suivante: il existe $q \geqslant 1$ et $C > 0$ tel que pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on ait

$$||f||_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant C||f'||_{L^q(\mathbb{R})}.$$

On suppose cette inégalité vraie.

Appliquer cette inégalité à $g(x) = f(\lambda x)$, pour un certain $\lambda > 0$. En déduire une condition nécessaire sur la valeur de q. Conclure.

Exercice 12.

1. En utilisant le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, démontrer que l'injection $W^{1,1}(0,1) \subset L^1(0,1)$ est compacte.

2. Trouver une suite bornée de $W^{1,1}(0,1)$ qui n'admet pas de sous-suites convergentes en norme L^∞.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de démontrer que le théorème de Rellich n'est pas forcément vérifié sur $\mathbb{R}$ tout entier. On considère une fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $u_k = u(\cdot - k)$. Vérifier que cette suite est bornée dans $H^1(\mathbb{R})$ et qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente dans $L^2(\mathbb{R})$

Exercice 14 (Dual de $H_0^1(I)$)**.** On identifie L^2 à son dual, et on s'intéresse au dual de $H_0^1(I)$ vu comme un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(I)$. Montrer que pour tout $F \in H_0^1(I)$, il existe $(f_0, f_1) \in L^2(I)$ tels que pour tout $v \in H_0^1(I)$, on ait $F(v) = \int_I f_0 v + \int_I f_1'$. Montrer que si I est borné, on peut choisir $f_0 = 0$.

Exercice 15. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $f_\varepsilon(t) := \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$, et $f_\varepsilon(t) = 0$ sinon.

1. Montrer que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $u \in H^1(I)$.

2. Montrer que $f_\varepsilon(u) \to u^+$ quand $\varepsilon \to 0$, où $u^+ = \max(u, 0)$.
3. En utilisant la définition de la dérivée faible de $f_\varepsilon(u)$, démontrer que $u^+ \in H^1(I)$ et que $(u^+)' = 1_{u>0} u$.
4. En déduire que $|u| \in H^1(I)$ et calculer la dérivée faible de $|u|$ en fonction de celle de u.

Exercice 16. Soit L^2_{per} l'ensemble des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et de carré intégrable sur $(0, 2\pi)$. On considère l'espace de Sobolev H^1_{per} des fonctions de L^2_{per} qui admettent une dérivée faible dans L^2_{per}. H^1_{per} est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f, g) \in (H^1_{\text{per}})^2, < f, g >_{H^1_{\text{per}}} = < f, g >_{L^2_{\text{per}}} + < f', g' >_{L^2_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)} \Big) dt.$$

On rappelle également que la famille $\{e^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (définie par $e^n(t) = e^{int}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) est une base hilbertienne de L^2_{per}. On définit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

1. Soit $f \in H^1_{\text{per}}$. On rappelle que f admet un représentant qui se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt.$$

a. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques 2π-périodiques. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ telle que

$$P_n \underset{n \to +\infty}{\to} f' \text{ dans } L^2_{\text{per}}.$$

b. En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ telle que

$$f_n \underset{n \to +\infty}{\to} f \text{ dans } H^1_{\text{per}}.$$

c. Conclure que $\mathcal{P}$ est dense dans H^1_{per}.

2. Soit $f \in L^2_{\text{per}}$.

a. On suppose que f appartient à $\mathcal{P}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f).$$

b. En déduire que cette formule reste vraie si f appartient à H^1_{per}.

3. Soit $H = \{f \in L^2_{\text{per}}, \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 < +\infty\}$. On munit l'espace H du produit scalaire suivant

$$\forall (f, g) \in H^2, < f, g >_H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + n^2) c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

a. Vérifier que H est un espace de Hilbert.
b. On souhaite montrer que les espaces H^1_{per} et H sont identiquement égaux.
(i) Vérifier que H^1_{per} est un sous-espace fermé de H, et que

$$\forall (f, g) \in (H^1_{\text{per}})^2, < f, g >_{H^1_{\text{per}}} = < f, g >_H .$$

Indication. On pourra utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
(ii) Montrer que l'orthogonal de H^1_{per} pour le produit scalaire $< \, , \, >_H$ est égal à $\{0\}$.
(iii) Conclure.

Problèmes variationels linéaires

Exercice 17. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + (\int_0^1 u)(\int_0^1 v)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \int_0^1 fv, \forall v \in H^1(0,1)$.
2. Vérifier que $u' \in H^1(0,1)$ et interpréter le problème différentiel résolu (i.e. trouver l'équation différentielle et les conditions aux limites satisfaites par u).

Exercice 18. Soit $V = \{u \in H^1(0,1) | u(1/2) = 0\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$ et que $v \in V \mapsto ||v'||_{L^2(0,1)}$ est une norme sur V équivalente à la norme H^1.
2. Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $\int_0^1 u'v' = v(0), \forall v \in V$.
3. Interpréter le problème résolu, déterminer explicitement u. A-t-on $u' \in H^1(0,1)$?

Exercice 19. On considère le problème de Dirichlet sur un intervalle borné $]a,b[$

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans }]a,b[, \qquad u(a) = 0,\ u(b) = 0,$$

où $f \in L^\infty(a,b)$.

1. Rappeler les résultats vus en cours sur cette équation. Montrer que $u' \in H^1(a,b)$.
2. Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et G est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $K = ||f||_\infty$. Montrer que $G(u-K) \in H_0^1(I)$.
3. En déduire que $||u||_{L^\infty(a,b)} \leqslant ||f||_{L^\infty(a,b)}$.

Exercice 20 (Problème de Sturm-Liouville avec conditions de Dirichlet)**.** Soit $I =]0,1[$. On se donne deux fonctions p et q de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\text{p.p.en } x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq 0.$$

1. On pose

$$\forall (u,v) \in H_0^1(I)^2, a(u,v) = \int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H_0^1(I)$.
b. Soit $f \in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(I)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(I), a(u,v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H^1(I)$ et que

$$-(pu')' + qu = f.$$

b. On se donne une fonction v de $H_0^1(I)$, telle que la fonction pv' appartienne à l'espace $H^1(I)$ et qui vérifie

$$-(pv')' + qv = f.$$

Montrer que

$$u = v.$$

3. On suppose de plus que la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que les fonctions q et f sont continues sur I. Montrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et qu'elle est solution de l'équation

$$-pu'' - p'u' + qu = f,\ u(0) = u(1) = 0.$$

Exercice 21 (Problème de Neumann). Soit $I =]0, 1[$. On se donne deux fonctions p et q de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$\text{p.p.en } x \in I, p(x) \geq \alpha \text{ et } q(x) \geq \alpha.$$

1. On pose

$$\forall (u, v) \in H^1(I)^2, a(u, v) = \int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H^1(I)$.
b. Soit $f \in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u \in H^1(I)$ telle que

$$\forall v \in H^1(I), a(u, v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H_0^1(I)$ et que

$$-(pu')' + qu = f.$$

b. On se donne une fonction v de $H^1(I)$, telle que la fonction pv' appartienne à l'espace $H_0^1(I)$ et vérifie

$$-(pv')' + qv = f.$$

Montrer que

$$u = v.$$

3. On suppose de plus que la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que les fonctions q et f sont continues sur I. Montrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et qu'elle est solution de l'équation

$$-pu'' - p'u' + qu = f, \;\; u'(0) = u'(1) = 0.$$

Exercice 22 (Conditions de Neumann non homogènes). Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, borné de $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } [a, b], \qquad u'(a) = \alpha, \; u'(b) = \beta$$

où f est une application continue sur $[a, b]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, si u est une solution de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour toute application $v \in H^1(I)$ on a

$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x) \; dx = \int_I f(x)v(x) \; dx + \beta v(b) - \alpha v(a) \; .$$

2. Montrer que la forme linéaire $\Phi(v) = \displaystyle\int_I f(x)v(x) \; dx + \beta v(b) - \alpha v(a)$ est continue sur $H^1(I)$.

3. En déduire l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(I)$ telle que

$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x) \; dx = \int_I f(x)v(x) \; dx + \beta v(b) - \alpha v(a) \qquad \forall v \in H^1(I) \; .$$

4. Montrer finalement que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation demandée.