TD 7: Introduction au calcul des variations

Exercice 1. Soit $h : [0,1] \times \mathbb{R} : \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, dont la dérivée partielle par rapport à la seconde variable existe et est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On considère la fonctionnelle donnée par

$$J(x) = \int_0^1 |x'(t)|^2 + h(t, x(t))dt,$$

posée sur l'espace

$$E = \{x \in H^1(0,1),\, x(0) = a,\, x(1) = b.\}$$

1. Montrer qu'elle vérifie toutes les conditions du cours permettant l'existence d'un minimum sur E.
2. Montrer qu'elle vérifie toutes les conditions permettant d'avoir une condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1. Donner l'équation d'Euler-Lagrange associée et montrer qu'un minimum est forcément de classe C^2.
3. Si $h(t,y) = yf(t)$ avec f continue bornée et $a = b = 0$, que retrouve-t-on?

Exercice 2. On considère le problème de minimisation sous contraintes suivant:

$$I := \min_{x \in H_0^1(0,1), ||x||_{L^2(0,1)}=1} \int_0^1 x'(t)^2 dt.$$

1. Montrer que le problème possède au moins une solution. On note x une telle solution.
2. Montrer que l'application
$$\Phi(y) = \frac{\int_0^1 y'(t)^2 dt}{\int_0^1 y(t)^2 dt}$$
est bien définie et différentiable sur un voisinage de x dans $H_0^1(0,1)$.
3. Montrer que
$$I = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \Phi(y).$$
et que l'infimum du problème de droite est atteint en x.
4. Calculer la différentielle de Φ en x et en déduire que pour tout $h \in H_0^1(0,1)$,
$$\int_0^1 x'(t)h'(t)dt - \int_0^1 (x'(t))^2 dt \int_0^1 x(t)h(t)dt = 0.$$
5. Montrer que $x' \in H^1(0,1)$ et que
$$x''(t) = -\lambda x(t) \text{ p.p.},$$
pour un λ que l'on déterminera.
6. En déduire que x est de classe C^2 et le calculer.

Exercice 3. On considère le problème de maximisation sous contraintes suivant:

$$I := \max_{x \in H_0^1(0,1), ||x'||_{L^2(0,1)} \leqslant 1} \int_0^1 x(t)dt\}.$$

1. Montrer que $I > 0$.
2. Montrer que le problème possède au moins une solution. On note x une telle solution.
3. Vérifier que si x est une solution, alors
$$\int_0^1 (x'(t))^2 dt = 1.$$
4. Montrer alors que la solution est unique.
5. Soit $h \in H_0^1(0,1)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$\Phi(a,b) = (\int_0^1 ax(t) + bh(t)dt, \int_0^1 (ax'(t) + bh'(t))^2 dt),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$
6. Expliquer pourquoi Φ ne peut pas être une bijection d'un voisinage de $(1,0)$ dans un voisinage de
$$(\int_0^1 x(t)dt, \int_0^1 (x'(t))^2 dt).$$
Déduire du théorème d'inversion locale que la différentielle de Φ en $(1,0)$ n'est pas inversible, et donc que
$$\lambda \int_0^1 x'(t)h'(t)dt = \int_0^1 h(t)dt,\ \text{où } \lambda = \int_0^1 x(t)dt = I.$$
7. En déduire que $x' \in H^1(0,1)$ et $x'' = -\frac{1}{\lambda}$.
8. Conclure que x est de classe C^2 et le calculer.

Exercice 4. Soit $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle qu'il existe $C > 0$ pour lesquels
$$p^2 \leqslant C\left(1 + p^2\right) \text{ et } L(p) \leqslant C(1 + p^2).$$
Poue $b \in \mathbb{R}$, on considère le problème
$$I(b) := \inf_{x \in H^1(0,1), x(0)=0, x(1)=b} \int_0^1 L(x'(t))dt.$$

1. On suppose dans cette question que L est convexe. Montrer que le problème a au moins une solution et calculer une solution.
2. On ne suppose plus L convexe. Soient $a < b < c$ trois réels et $\lambda \in]0,1[$ tels que $b = (1-\lambda)a + \lambda c$. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de $H^1(0,1)$ telle que $x_n'(s) \in [a,c]$ pour presque tout $s \in [0,1]$, $x_n(0) = 0, x_n(1) = b$ et x_n' converge faiblement vers b dans L^2. En déduire que
$$I(b) \geqslant (1-\lambda)L(a) + \lambda L(c).$$
3. On pose
$$L^{**}(b) = \inf_{(a,c) \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1], b = (1-\lambda)a + \lambda c} (1-\lambda)L(a) + \lambda L(c).$$
Montrer que L^{**} est convexe, continue, véririe $L^{**} \leqslant L$ et la propriété de croissance du d"but de l'énoncé.
4. En déduire que $I(b) = L^{**}(b)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.
5. En s'inspirant de la première question, montrer que le problème de minimisation admet une solution si et seulement si $L(b) = L^{**}(b)$.

Exercice 5. Soit $f \in C^0([0,1])$. On souhaite résoudre le problème variationnel

$$\begin{cases} -u'' + u + u^3 = f \text{ dans}(0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On s'intéresse au problème variationnel suivant (obtenu en faisant une IPP dans H^1): trouver $u \in H_0^1(0,1)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, on ait

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv + \int_0^1 u^3 v = \int_0^1 fv.$$

On considère

$$F : u \in H_0^1(0,1) \mapsto \int_0^1 \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} - fu \right).$$

1. Montrer que F est strictement convexe.
2. Montrer que F est différentiable et calculer la différentielle $dF(u)$.
3. En déduire que le problème variationnel admet une unique solution.
4. Montrer que $u' \in H^1(0,1)$ et que $-u'' + u + u^3 = f$ presque partout.
5. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution $u \in C^2([0,1])$ à (1).
6. On suppose maintenant seulement $f \in L^2(0,1)$. Montrer que la solution du problème variationnel u vérifie

$$||u||_{L^6(0,1)}^3 \leqslant ||f||_{L^2(0,1)}.$$

   Montrer que si $f \in L^p(I)$ avec $p \in [2, \infty[$, alors

$$||u||_{L^{3p}(0,1)}^3 \leqslant ||f||_{L^p(0,1)}.$$

7. En déduire que si $f \in L^\infty(0,1)$, on a

$$||u||_{L^\infty(0,1)}^3 \leqslant ||f||_{L^\infty(0,1)}.$$

8. Montrer que si $f \in L^\infty(0,1)$ avec $f \geqslant 0$ presque partout, alors $u \geqslant 0$. *Indication: introduire $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $g = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis montrer que si $w \in H_0^1(0,1)$, alors $g(w) \in H_0^1(0,1)$.*

Exercice 6.
On considère la fonctionnelle suivante sur l'espace $H_0^1(]0,1[)$:

$$J(u) = \int_0^1 u'(x)^2 \, dx + u\left(\frac{1}{4}\right) + \int_0^1 \operatorname{th}(u(x)) \, dx.$$

Rappelons la fonction tangente hyperbolique, de classe C^∞ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \lim_{-\infty} \operatorname{th}(x) = -1, \; \lim_{+\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

1. Justifier rapidement que J est une fonctionnelle bien définie sur $H_0^1(]0,1[)$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\left| u\left(\frac{1}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(0,1)}.$$

   (b) En déduire que pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$,

$$J(u) \geq -2.$$

   On notera

$$I := \inf_{u \in H_0^1(]0,1[)} J(u),$$

   qui est donc fini.

(c) Montrer que $I \leq 0$.

3. On considère une suite minimisante (u_n) pour J. Montrer que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(]0,1[)$.
4. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de (u_n) qui converge faiblement dans $H_0^1(]0,1[)$ et fortement dans $C^0([0,1])$.
5. Montrer qu'il existe une fonction $\overline{u} \in H_0^1(]0,1[)$ qui minimise J.
6. Montrer que cette fonction satisfait : pour tout v dans $H_0^1(]0,1[)$,

$$2\int_0^1 \overline{u}'(x)v'(x)\,dx + v\left(\frac{1}{4}\right) + \int_0^1 [1 - \mathrm{th}^2(\overline{u}(x))]v(x)\,dx = 0.$$

7. Soit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ défini par $F(x) = x$ pour $x \leq \frac{1}{4}$ et $F(x) = \frac{1}{4}$ pour $x \geq \frac{1}{4}$.
   (a) Montrer que $F \in H^1(]0,1[)$ et que pour tout v dans $H_0^1(]0,1[)$,

   $$v\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^1 F'v'.$$

   (b) En déduire que $(2\overline{u} + F)' \in H^1(]0,1[)$ et écrire une équation satisfaite par la dérivée de cette fonction. A-t-on $\overline{u}' \in H^1(]0,1[)$?

Exercice 7. Soit α une fonction de classe $C^1([0,1])$, strictement positive en tout point de $[0,1]$. On considère la fonctionnelle suivante sur l'espace $H_0^1(]0,1[)$:

$$J(u) = \int_0^1 \alpha(x)u'(x)^2 + \int_0^1 \sin(u(x))\,dx.$$

1. Justifier l'existence de constantes c et C strictement positives telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad c \leq \alpha(x) \leq C.$$

2. Montrer que

$$u \mapsto \left(\int_0^1 \alpha(x)u'(x)^2\,dx\right)^{1/2},$$

   est une norme sur $H_0^1(]0,1[)$, équivalente à la norme usuelle de H_0^1 (donnée par le cas particulier $\alpha = 1$.)

3. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$,

$$J(u) \geq -1.$$

   On notera

$$I := \inf_{u \in H_0^1(]0,1[)} J(u),$$

   qui est donc fini. Montrer que $I \leq 0$.

4. On considère une suite minimisante (u_n) pour J. Montrer que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(]0,1[)$.
5. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de la précédente qui converge dans $C^0([0,1])$.
6. Montrer qu'il existe une fonction $\overline{u} \in H_0^1(]0,1[)$ qui minimise J.
7. Montrer que cette fonction satisfait

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ 2\int_0^1 \alpha(x)\overline{u}'(x)v'(x) + \int_0^1 \cos(\overline{u}(x))v(x)\,dx = 0.$$

8. Montrer que $\overline{u}$ satisfait $\alpha\overline{u}' \in C^1([0,1])$ et déterminer une équation différentielle satisfaite par $\overline{u}$. En déduire que $\overline{u}$ appartient à $C^2([0,1])$.