Retour "compact au sens de Borel-Lebesgue implique compact au sens de Bolzano-Weierstrass"

Il y a une preuve plus simple que celle effectuée en cours. Reprenons le cas où l'ensemble des valeurs prises par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de cardinal infini. On note $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. On change légèrement l'argument présenté en cours : on suppose que pour tout $x \in X$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A$ est fini. Alors

$$X = \bigcup_{x\in X} B(x, r_x).$$

Il s'agit d'un recouvrement par des ouverts de X, supposé compact au sens de Borel-Lebesgue. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_{x_i}).$$

On a donc que

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} \left(B(x_i, r_{x_i}) \cap A\right).$$

On a donc une union fini d'ensembles finis, A est donc fini, ce qui est faux par hypothèse. En niant notre supposition de départ, on a donc existence de $x \in X$ tel que pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est de cardinal infini. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n) \cap A$ est de cardinal infini. Il est alors facile d'exhiber une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers x : pour $n = 1$, par définition de A, il existe $x_{\varphi(1)}$ dans $B(x, 1)$, puis pour $n = 2$, $B(x, 1/2) \cap \{x_n |\ n > \varphi(1)\}$ est de cardinal infini, il existe donc $x_{\varphi(2)}$ dans $B(x, 1/2)$ avec $\varphi(2) > \varphi(1)$, et ainsi de suite, on crée une suite extraite $x_{\varphi(n)}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $x_{\varphi(n)} \in B(x, 1/n)$. Cette sous-suite converge clairement vers x, par construction. Donc X est compact au sens de Bolzano-Weierstrass.