TD 1: Compacité dans les espaces métriques

Des indications sont disponibles en fin de feuille.

Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass Dans les exercices 1 et à 12, on n'utilisera que la compacité au sens de Bolzano-Weiertrass. Les exercices 1 à 7 sont des rappels de cours.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique quelconque et A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée et bornée.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que (X, d) est complet.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique compact et A une partie de X. Montrer que A est compacte si et seulement si A est fermée.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes et une intersection quelconque de parties compactes reste compacte.

Exercice 6. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit $f : X \to X'$ continue. Montrer que $f(X)$ est compact dans X'.

Exercice 7 (Théorème de Heine)**.** Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit $f : X \to X'$ continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 8. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit $f : X \to X'$ continue et bijective. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 9.

1. On considère (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques compacts. Montrer que $(X_1 \times X_2, d_{12})$ est encore un espace métrique compact, où $X_1 \times X_2$ est muni de la de la distance suivante
$$d_{12}((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2').$$
Généraliser au cas de n espaces métriques compacts.

2. On considère maintenant $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une infinité dénombrable d'espaces métriques compacts. On considère la distance d définie sur $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ donnée par
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(d_n(x_n, y_n), 1)}{2^n}, \; x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \; y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$
Montrer que $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d)$ est un espace métrique compact.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soient K_1 et K_2 deux ensembles compacts de X. Montrer que $d(K_1, K_2)$ est atteinte.

2. Soit K un compact de E et F un fermé de E. On suppose que $K \cap F = \emptyset$. Montrer que $d(K, F) > 0$. Cette propriété reste-elle vérifiée si K est seulement fermé ?

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique compact et $F : X \to X$ une application contractante : pour tout $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α.

2. Soit $x_0 \in X$. Montrer que la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.

3. Ces résultats restent-ils vrais si X n'est plus compact ?

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique compact. On considère une dilatation $f : X \to X$, *i.e.* une application vérifiant : pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$.

1. Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie.
3. Montrer que f est une bijection continue.

Compacité au sens de Borel-Lebesgue, précompacité

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to R$ une application localement bornée : pour tout $x \in X$, il existe $M_x > 0$ et U_x un voisinage ouvert de x tel que pour tout $y \in U_x$, on ait $|f(y)| \leqslant M_x$. Montrer que f est bornée.

Exercice 14. Construire dans $\mathbb{R}$ une métrique d équivalente (au sens topologique : qui a les mêmes parties ouvertes) à la métrique usuelle pour laquelle $(\mathbb{R}, d)$ est un espace précompact.

Exercice 15. 1. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que $\{x_n\} \cup \{x\}$ est compact.

2. (Application 1) Soit (Y, d') un autre espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que l'image réciproque de tout compact est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé est un fermé.
3. (Application 2) Soit (Y, d') un autre espace métrique et $f : X \to Y$ une application injective. Montrer que f est continue si et seulement l'image de tout compact de X par f est un compact de Y. Ce résultat reste-t-il vérifié si f n'est pas injective ?

Exercice 16 (Séparation de compacts)**.** Soit (X, d) un espace métrique, A un compact de X, B un fermé de X tel que $A \cap B = \emptyset$.

1. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant A tel que $\overline{U} \cap B = \emptyset$.
2. On suppose de plus que B est compact. Montrer qu'il existe un ouvert V contenant B tel que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 17. On munit $X = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $||P|| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Trouver un ensemble précompact de X qui ne soit pas relativement compact.

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Montrer que A est précompacte si et seulement si $\overline{A}$ est précompacte.

Séparabilité

Exercice 19. 1. Soit (X, d) un espace métrique. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I non dénombrable et une collections $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de X tels que la propriété suivante est vérifiée :

$$i \neq j \Rightarrow d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon.$$

Montrer que X n'est pas séparable.

2. Montrer que $(L^\infty(\mathbb{R}), || \cdot ||_\infty)$ n'est pas séparable.

Exercice 20. Montrer que dans un espace métrique (X, d) séparable, toute collection d'ouverts disjoints est au plus dénombrable.

Exercice 21. 1. Montrer qu'un espace métrique (X, d) est séparable si et seulement s'il existe une famille dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que tout ouvert V de X s'écrive comme union de certains des U_n.

2. En déduire qu'une partie A d'un espace séparable est encore séparable.

Indications

Exercice 1. Pour le caractère fermé, utiliser le critère séquentiel habituel. Pour le caractère borné, raisonner par l'absurde en revenant à la définition d'une partie bornée.

Exercice 2. Montrer que toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Exercice 3. Pour le sens direct, montrer que si une suite converge, ses sous-suites convergent vers la même limite.
Pour le sens réciproque, raisonner par l'absurde en construisant "à la main" une deuxième valeur d'adhérence.

Exercice 4. Pour le sens direct, utiliser l'exercice 1.
Pour le sens réciproque, raisonner directement en revenant à la définition de la compacité au sens de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 5. Pour la réunion, montrer par l'absurde que de toute suite de la réunion, on peut extraire une sous-suite qui reste dans un seul des compacts.
Pour l'intersection, utiliser la définition de la compacité pour un seul compact, et utiliser l'exercice 1 pour remarquer que l'intersection est forcément fermée.

Exercice 6. Faire un raisonnement direct, en utilisant sur les antécédents la compacité de X.

Exercice 7. Raisonner par l'absurde en contredisant l'uniforme continuité avec $\eta = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Pour montrer que f^{-1} est continue, revenir à la définition séquentielle de la continuité, utiliser la compacité de X et le résultat de l'exercice 3.

Exercice 9. Pour la première question, revenir à la définition de la compacité.
Pour la deuxième question, raisonner comme pour la première et utiliser un argument diagonal tel que vu en cours.

Exercice 10. Pour la première question, penser à faire deux extractions successives.
Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde. Pour le contre-exemple, regarder des graphes bien chois de fonctions réelles à valeurs réelles.

Exercice 11. Pour la partie existence de première question, s'intéresser à l'inf de $g : x \mapsto d(x, f(x))$ et raisonner par l'absurde en le supposant strictement positif ; l'unicité étant simple.
Pour la deuxième question, considérer la suite $u_n = d(\alpha, x_n)$ et montrer par l'absurde qu'elle converge vers 0.
Pour la troisième question, construire un contre-exemple simple dans $\mathbb{R}^+$, en trouvant une fonction adéquate dont la dérivée est toujours dans $]-1, 1[$ mais qui tend vers 1 en $\pm\infty$.

Exercice 12. Pour la première question, construire une extraction φ telle que $n \mapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ soit strictement croissante puis regarder $x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$.
Pour la deuxième question, reprendre la première question avec a et b deux points quelconques de X et les suites associées, puis majorer $d(f(a), f(b))$.
Pour la dernière question, l'injectivité est facile, pour la surjectivité, réinterpréter la première question en termes d'adhérence de $f(X)$.

Exercice 13. Appliquer la définition de la compacité au sens de Borel-Lebesgue à un recouvrement bien choisi.

Exercice 14. Considérer $d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$.

Exercice 15. Pour la première question, utiliser la définition de la compacité au sens de Borel-Lebesgue.
Dans la deuxième question, regarder $f(F)$ avec F fermé, revenir à la définition séquentielle d'un fermé et utiliser la première question ainsi que l'hypothèse.
Pour la troisième question, le sens direct est une conséquence immédiate de l'exercice 6, pour le sens réciproque, utiliser la définition séquentielle de la continuité, restreindre f à un compact K bien choisi, et étudier la bijection $g : K \to f(K) = f_{|K}$ et montrer que g^{-1} est continue en utilisant l'exercice 4 et une caractérisation topologique de la continuité en termes de fermés, enfin utiliser l'exercice 3. Pour le contre-exemple, construire un exemple très simple sur $\mathbb{R}$, qui ne soit pas continu en un seul point.

Exercice 16. Ce n'est pas évident. Pour la première question, commencer par le cas où A est un singleton, utiliser la deuxième question de l'exercice 10, puis comprendre comment traiter le cas général en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue et le fait que l'adhérence d'une union finie est l'union des adhérences.

Pour la deuxième question, comprendre comment se ramener directement à la première question, quitte à changer les ensembles considérés.

Exercice 17. Ce n'est pas complètement évident. Exhiber une suite de polynômes qui "converge" dans $C^0([0,1])$ vers quelque chose qui ne soit pas un polynôme puis utiliser la première question de l'exercice 15 pour montrer la précompacité.

Exercice 18. Un sens est une conséquence d'une propriété vue en cours, pour l'autre, revenir à la définition topologique (par les voisinages) de l'adhérence.

Exercice 19. Raisonner par l'absurde, et créer une injection de la collection d'ouverts vers la suite dense.

Exercice 20. Pour la première question, raisonner par l'absurde, en approchant chacun des x_i par un élément de la suite dense de manière adéquate, puis remarquer qu'un ensemble non dénombrable ne peut pas être inclus dans un ensemble dénombrable.

Pour la deuxième question, trouver un ensemble simple, de cardinal non dénombrable, de fonctions qui sont toutes à distance plus grande que 1 les unes des autres, et utiliser la première question.

Exercice 21. Pour la première question, pour le sens direct, considérer l'ensemble $\mathcal{U}$ boules centrées sur les éléments de la suite dense et de rayon$1/n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que tout ouvert V est tel qu'un élément $x \in V$ est inclus dans un élément de $\mathcal{U}$ lui-même inclus dans V; conclure.

Le sens réciproque est plus simple, prendre un point dans chaque U_n non vide et utiliser la caractérisation de la densité par des voisinages.

Pour la deuxième question, utiliser la caractérisation donnée par la première question.