Correction de l'exercice numéro 4 de l'examen de 2012-2013

Exercice 1. Il faut dérouler le même raisonnement que sur l'exercice précédent: on écrit le système différentiel sous la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

avec

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système différentiel s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = exp(tA) \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Une fois que $x(0)$ et $y(0)$ (qui peuvent être choisis indépendamment) sont fixés, il n'y a qu'une seule solution x, y possible: l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2. On commence donc par calculer le polynôme caractéristique.

$$\chi_A = det(\begin{pmatrix} X-5 & -3 \\ 8 & X+6 \end{pmatrix}) = (X-5)(X+6) + 24 = X^2 + X - 6 = (X+3)(X-2).$$

(2 est racine évidente et -3 s'en déduit rapidement)

On a deux valeurs propres distinctes et on est en dimension 2 donc la matrice est diagonalisable. Trouvons ses vecteurs propres. Commençons par la valeur propre 2. On résoud

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cela donne un système de deux équations

$$5x + 3y = 2x, \tag{1}$$
$$-8x - 6y = 2y. \tag{2}$$

On voit que les équations précedente sont en fait équivalentes à

$$x + y = 0.$$

On prend donc comme base du sous-espace propre associé à 2 par exemple le vecteur

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Intéressons-nous maintenant à la valeur propre -3. On doit résoudre

$$5x + 3y = -3x, \tag{3}$$
$$-8x - 6y = -3y. \tag{4}$$

On voit que ceci se ramène en fait à $8x + 3y = 0$. On peut alors choisir par exemple comme base de notre sous-espace propre

$$e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Notre matrice de passage P s'écrit alors par exemple (mais vous pouvez aussi permuter les vecteurs si cela vous chante)

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Pour inverser cette matrice, soit on fait un pivot de Gauss, soit on utilise la formule de la comatrice. Comme le déterminant vaut clairement -5, on obtient

$$P^{-1} := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose D la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculons alors

$$exp(tA) = exp(P(tD)P^{-1} = Pexp(tD)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Après des calculs faisables mais pénibles, on obtient

$$exp(tA) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8e^{2t} - 3e^{-3t} & 3e^{2t} - 3e^{-3t} \\ -8e^{2t} - 8e^{-3t} & -3e^{2t} + 8e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Pour la question bonus, il fallait raisonner comme suit: l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2, et on peut en donner une base fournie par le couple correspondant à la condition initiale $x(0) = 1, y(0) = -1$ puis $x(0) = 3, x(1) = -8$ (ce sont exactement nos vecteurs propres). Des calculs immédiats donnent, du fait que $Ae_1 = 2e_1$ et que $Ae_2 = -3e_2$, qu'une base de l'espace des solutions est donnée par

$$x_1(t) = e^{2t}, \tag{5}$$
$$y_1(t) = -e^{2t}, \tag{6}$$

et

$$x_2(t) = 3e^{-3t}, \tag{7}$$
$$y_2(t) = 8e^{-3t}. \tag{8}$$

Du coup, n'importe quelle solution (x, y) s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux couples de solutions. Le premier couple est tel que ses composantes tendent vers $+\infty$, le deuxième tel qu'elles tendent vers 0. On en déduit facilement que si l'on veut que les deux composantes de x et y tendent vers 0, nécessairement (x, y) doit être colinéaire au deuxième vecteur de la base x_2, y_2.