

DM

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

est-elle diagonalisable? Justifier.

Exercice 3. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_A . En déduire les valeurs propres de A . Peut-on dire à ce stade si la matrice est triangulable? Diagonalisable?

On note $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux valeurs propres obtenues précédemment, ainsi que E_{λ_1} et E_{λ_2} les sous-espaces propres correspondant.

2. Calculer les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre λ_2 . En déduire une base de E_{λ_2} . Quelle est la dimension de E_{λ_2} ?
3. Démontrer que $\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) \leq 4$.
4. En déduire la dimension de E_{λ_1} . La matrice A est-elle diagonalisable? Expliquer.

Dorénavant, on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 . Donner une base de E_{λ_1} . En déduire une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$.
6. Calculer P^{-1} .
7. En déduire la valeur de $\exp(A)$.
8. La matrice A est-elle inversible? Justifier. Calculer son déterminant. Calculer son inverse à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.

9. On considère le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} x' &= x + y + z + t, \\ y' &= x + y - z - t, \\ z' &= x - y + z - t, \\ t' &= x - y - z + t. \end{cases}$$

Calculer l'ensemble des solutions de ce système. Quelle est sa dimension?

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle linéaire

$$\begin{cases} x' &= 4x + 4y, \\ y' &= x + 4y. \end{cases}$$

On considère une solution non nulle de ce système. Quelle est la limite de chacune de ses composantes en $+\infty$?