Examen de remise à niveau mathématique

Le barême est donné à titre indicatif. Essayez de ne pas passer plus de 10 mins sur le premier exercice.

Exercice 1. (3 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice suivante, carrée de taille n, formée de 1 sur les cases au-dessus de la diagonale:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses valeurs propres. Est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Expliquer.

Exercice 2. (12 points) On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_A. En déduire les valeurs propres de A. Peut-on dire à ce stade si la matrice est triangulable? Diagonalisable?

   On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les valeurs propres obtenues précedemment, ainsi que E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} les sous-espaces propres correspondant.

2. Quelle est nécessairement la dimension de chacun de ces sous-espaces propres? Expliquer.
3. Calculer les vecteurs propres associés à λ_1. En déduire une base de E_{λ_1}.
4. Calculer les vecteurs propres associés à λ_2. En déduire une base de E_{λ_2}.
5. Calculer les vecteurs propres associés à λ_3. En déduire une base de E_{λ_3}.

   Dorénavant, on note

   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

6. Donner une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$.
7. Calculer P^{-1}.
8. En déduire la valeur de $exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
9. La matrice A est-elle inversible? Justifier. Quel est son déterminant?
10. On considère le système d'équations différentielles suivant:

    $$\begin{cases} x' &= x + 2y - z, \\ y' &= 3x - y \\ z' &= -2x + 2y + 2z. \end{cases}$$

    Calculer l'ensemble des solutions de ce système. Quelle est sa dimension? Calculer la solution dont la donnée initiale est $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Exercice 3. (8 points) On s'intéresse au système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' &= x - y, \\ y' &= y. \end{cases} \tag{1}$$

1. Donner la matrice A telle que le système précedent peut être écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique P_A associé à A. Quelles sont les valeurs propres de A? A est-elle trigonalisable?

   Dorénavant, on note λ_1 la valeur propre de A, ainsi que E_{λ_1} le sous-espace propre correspondant.

3. Quelles sont les deux valeurs possibles pour la dimension de E_{λ_1}? Laquelle n'est pas possible? A est-elle diagonalisable? Dans la suite, on notera N la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que $N^0 = I_2$.

4. Que vaut N^2? En déduire ce que vaut N^k pour $k \geqslant 2$. En déduire en revenant à la définition de l'exponentielle d'une matrice la valeur de $exp(N)$ puis de $exp(tN)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

5. En déduire la valeur de $exp(tA)$. On pourra remarquer que $tA = tI_2 + tN$ et utiliser la formule suivante : si B et C sont deux matrices vérifiant $BC = CB$, alors $exp(B + C) = exp(B) \times exp(C)$.

6. En déduire les solutions du système (1). Quelles sont les solutions bornées de ce système?

Remarque: dans ce cas très simple, on peut en fait directement trouver successivement x et y, d'abord en résolvant $y' = y$ puis en utilisant la première équation.

Bonus: le faire.