Ordre des vecteurs propres dans la matrice de passage: une réponse complète et argumentée

On notera par la suite $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et si l'on se donne un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et une base $\mathcal{A} = (a_1, \dots a_n)$ de cet espace vectoriel E, on notera $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$ la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{A}$, autrement dit par définition

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix},$$

où chacun des vecteurs $f(a_i)$ est écrit sous forme colonne DANS LA BASE $\mathcal{A}$, dans le sens que sur la j-ième ligne du vecteur colonne $f(a_i)$, on trouve la composante sur le vecteur a_j. Dit de manière plus simple, si l'on a $f(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$, alors dans la base $\mathcal{A}$, le vecteur $f(a_i)$ s'écrit sous forme colonne

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On peut alors alternativement voir A une matrice ou comme une application linéaire $\widehat{A}$ agissant sur un vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

autrement dit comme une application linéaire que l'on écrirait dans la base canonique $\mathcal{C}_n$. Autrement dit, on a que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\widehat{A}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \widehat{A}(x_1, \dots, x_n).$$

Considérons maintenant que la matrice A est diagonalisable. Elle possède alors des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (pas nécessairement distinctes, pensez aux exemples de vendredi matin....) et des vecteurs propres associés écrits sous formes colonne $e_1, e_2, \dots e_n$, qui forment une base que j'appelerai dorénavant $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$. Par définition de ce que sont des valeurs propres et des vecteurs propres de A, on a que $\forall i \in [|1, n|]$,

$$Ae_i = \lambda_i e_i,$$

autrement dit, si l'on s'intéresse à l'application linéaire $\widehat{A}$ que représente A, on a que

$$\widehat{A}(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Or, regardons maintenant l'expression de $\widehat{A}$ DANS LA BASE $\mathcal{B}$. Par définition, regarder $\widehat{A}$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est former la matrice constituée des vecteurs colonnes $Ae_1, Ae_2, \dots Ae_n$ mis les uns à côté des autres en prenant les composantes dans la base e_i. Autrement dit,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\widehat{A}) = \begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \dots & Ae_n \end{pmatrix}.$$

Or justement chacun des vecteurs est tel que Ae_i est colinéaire à e_i, autrement, chaque Ae_i est tel que quand vous le regardez dans la base $\mathcal{B}$, il a une seule composante éventuellement non nulle, qui est sa composante sur le vecteur e_i. Autrement dit, dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur Ae_i se décompose sous forme de vecteur colonne (cf les explications du début)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

λ_i étant sur la i-ème ligne. Du coup, vu dans la base $\mathcal{B}$, $\widehat{A}$ s'écrit sous la forme diagonale où la diagonale comporte les λ_i:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\widehat{A}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

matrice que l'on notera dorénanvant D comme d'habitude. Par les formules de changement de base, vous savez que la relation qui lie $\widehat{A}$ vu dans la base canonique à $\widehat{A}$ vu dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\widehat{A}) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B})^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\widehat{A})\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B}).$$

On notera dorénavant P la matrice de changement de base $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B})$. Vous voyez que ceci correspond en fait exactement par définition à avoir mis les vecteurs propres $e_1, \dots e_n$ sous forme de colonnes à la suite les uns aux autres. La relation précédente devient alors exactement celle que j'utilise tout le temps

$$D = P^{-1}AP.$$

Après cette "petite digression", revenons à ce qui nous intéresse. Imaginons un instant que l'on change l'ordre d'insertion de mes vecteurs dans la matrice P, par exemple imaginons que je choisisse de mettre e_2 avant e_1. Je forme alors une matrice Q qui s'écrit sous forme colonne

$$\begin{pmatrix} e_2 & e_1 & e_3 \dots e_n \end{pmatrix},$$

qui est en fait la matrice dans la base canonique d'une nouvelle base $\mathcal{B}'$, qui est la même que $\mathcal{B}$ où on a permuté les deux premiers vecteurs : $\mathcal{B}' := (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$. Du coup, en appliquant le même raisonnement que ce qui est fait précédemment, on voit que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\widehat{A}) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B}')^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\widehat{A})\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{B}'),$$

autrement dit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\widehat{A}) = Q^{-1}AQ.$$

Mais justement, vous avez ici échangé les deux premiers vecteurs de la ligne, autrement dit le premier vecteur est tel que $Ae_2 = e_2$, le deuxième est tel que $Ae_1 = e_1$, etc etc. Autrement dit, vu dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\widehat{A})$ s'écrit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\widehat{A}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0\dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

autrement dit permuter les vecteurs e_1 et e_2 n'a fait que permuter l'ordre dans lequel je mets les valeurs propres dans la matrice D. Ainsi, de manière générale, si vous permutez des vecteurs propres dans la matrice de passage P, autrement dit si vous ne les mettez pas dans le même ordre, et si vous appelez $\sigma \in \mathcal{S}_n$ la permutation de $[|1,n|]$ qui modélise le dérangement que vous faites subir aux vecteurs, vous vérifiez aisément, en appelant $P_\sigma = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{C}_n$ et la base dérangée $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, on a la relation

$$P_\sigma^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(2)} & 0\dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{\sigma(i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix},$$

autrement dit que vous avez juste permuté l'ordre dans lequel vous mettez les valeurs propres dans la matrice D, ce qui n'est pas grave!