TD 1: Bases de l'algèbre linéaire

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels réels?

1. $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{R}^+$.
3. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 0$.
4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x'(t) + \sqrt{t^2 + e^{-t^5}}x(t) = 1$.
5. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivables en tout point.
6. L'ensemble des suites réelles convergentes.
7. L'union de l'ensemble des suites réelles constantes et des suites divergentes.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{((0, y)|y \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{((0, y)|y \geqslant 0\}$.
3. $\{((0, y)|y \in \mathbb{R}\} \cup \{((x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\{((x, y)||x| = |y|\}$.
5. $\{((x, y)|x = y\}$.

Exercice 4. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$?

1. $F = Vect((0, 1, 0))$ et $G = Vect((1, 1, 1))$.
2. $F = Vect((0, 1, 0), (1, 1, 0))$ et $G = Vect(1, 0, 0)$.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 6. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Donner leur rang. Sont-elles génératrices de l'espace vectoriel dans lequel elles sont incluses?

1. $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$.
2. $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$.
3. $\{(1, 0), (1, 1), (2, 5)\} \subset \mathbb{R}^2$.
4. $\{x \mapsto e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7. On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ \frac{h}{3} \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la famille $\{u, v, w\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur n que $Vect(\{t \mapsto cos(kt)|k \leqslant n\}) = Vect(\{t \mapsto cos(t)^k|k \leqslant n\})$.

Exercice 9. Les espaces vectoriels réels suivants sont-ils de dimension finie? Si oui, donner leur dimension et une base.

1. $\mathbb{C}$
2. L'ensemble des solutions de $x' + 2tx = 0$.
3. L'ensemble des suites réelles.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x + 5y\}$.
5. L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à n.
6. L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de sous-espace vectoriel de dimension 0, de dimension 1, de dimension 2,... de dimension $n-1$.

Exercice 11. On considère $a_0, \dots a_n$ $n+1$ nombres réels distincts et $b_0, \dots, b_n$ $n+1$ nombres réels (pas forcément distincts). On rappelle que l'ensemble des polynômes réels de dimension inférieure à n est un espace vectoriel de dimension finie $n+1$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes dénotée $(L_0, \dots L_n)$ telle que pour tout $i \in [|0, n|]$ on a $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$. Expliciter cette famille de polynômes.
2. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout i on ait $P(a_i) = b_i$ et l'expliciter.
4. Application: on considère la tableau suivant, qui donne la probabilité p qu'un piéton meure en étant ecrasé par une voiture en fonction de la vitesse v de celle-ci.

v (km/h)	p
20	10%
40	30%
60	85%
80	100%

   Quelle est la probabilité de mourir si la vitesse de la voiture est de 50 km/h? Et de 10 km/h? Comment expliquer ce résultat?

5. Application 2: le Président de la République est la seule personne a connaître le code qui permet d'autoriser l'utilisation de la bombe atomique (On supposera que ce code est un certain entier n_0 positif mais inférieur à un certain entier p connu supposé grand). Pourtant, en cas où le Président serait totalement injoignable (Ex: tour de pédalo au milieu d'un lac), celui-ci souhaiterait qu'en cas de nécessité extrême, des personnes de confiance (Premier ministre, Ministre des Affaires Etrangères, Président de l'Assemblée Nationale, Président du Sénat) puissent avoir connaissance de ce code, à condition que ces 4 personnes soient toutes convaincues de la nécessité d'avoir à se servir du code et qu'elles soient toutes présentes en un même lieu.
   (a) Donner une méthode reposant sur l'interpolation de Lagrange permettant au Président de créer une méthode de cryptage remplissant les conditions précédentes, et expliquer pourquoi celle-ci fonctionne. Indication: on pourra penser à introduire trois entiers naturels n_1, n_2, n_3 inférieurs à p tirés aléatoirement et à créer le polynôme $P = \sum_{i=0}^{3} n_i X^i$.
   (b) Que ce passe-t-il si une personne est malhonnête parmi les 4? Et si au moins deux personnes sont malhonnêtes?