TD 3: Déterminant, théorie spectrale, exponentielle de matrices.

Exercice 1. Déterminer les déterminants des matrices suivantes, en developpant par rapport aux lignes ou aux colonnes:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des applications suivantes:

1. $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto x'$.
2. $(u_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})$.

Exercice 3. Pour chacune des matrices A réelles suivantes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. La matrice est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathbb{R}$? Dans ce cas, donner une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (resp. triangulaire supérieure). Dans le cas où la matrice est inversible, trouver son inverse à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton. Dans le cas où la matrice est diagonalisable, donner son exponentielle.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$