Correction de l'exercice numéro 4 de la feuille de TD numéro 2

1. Un plan est de dimension 2 car dans l'équation $z = x + y$, on peut choisir x et y comme on veut et z est alors imposé (deux degrés de liberté). Pour trouver une base on choisit deux vecteurs non colinéaires à l'intérieur de ce plan, par exemple $x = 0, y = 1$ impose $z = 1$ et $x = 1, y = 0$ impose $z = 1$. Une base est donc

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

On sait qu'un tel supplémentaire D doit être une droite vectorielle, car on doit avoir $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = dim(P) + dim(D) = 2 + dim(D)$, donc $dim(D) = 1$. On peut choisir la droite orthogonale au plan, autrement dit la droite dont un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (autrement dit que le produit scalaire doit être nul). On doit donc résoudre le système

$$1 \times x_0 + 0 \times y_0 + 1 \times z_0 = x_0 + z_0 = 0,$$
$$0 \times x_0 + 1 \times y_0 + 1 \times z_0 = y_0 + z_0 = 0.$$

Une solution non nulle évidente est $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = -1$. On a donc que D peut être la droite engendrée par le vecteur
$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

2. soient $e_1, e_2 \in E$ deux vecteurs, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On décompose $e_1 = f_1 + g_1$ et $e_2 = f_2 + g_2$ avec $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. On a alors que

$$p(\lambda e_1 + \mu e_2) = p(\lambda f_1 + \lambda g_1 + \mu f_2 + \mu g_2) = p((\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)).$$

Or F et G étant des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire, donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$ et $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$. Autrement dit l'unique décomposition de $\lambda e_1 + \mu e_2$ sous la forme $\tilde{f}_1 + \tilde{g}_1$ avec $\tilde{f}_1 \in F$ et $\tilde{g}_1 \in G$ est $\tilde{f}_1 = \lambda f_1 + \mu f_2$ et $\tilde{g}_1 = \lambda g_1 + \mu g_2$. Par définition de p, on a donc

$$p(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda f_1 + \mu f_2 = \lambda p(e_1) + \mu p(e_2),$$

ce qui est la définition de dire que p est linéaire. De plus, $p \circ p(e_1) = p(f_1)$. Or la décomposition unique de f_1 sur la somme directe de F et G est $f_1 + 0$, donc $p(f_1) = f_1$, et on obtient $p \circ p(e_1) = f_1 = p(e_1)$. Comme $p(e_1) = f_1 \subset F$, l'image de p est incluse dans F. De plus, si $f \in F$, alors $p(f) = f$ donc F est incluse dans l'image de p et $Im(p) = f$. Le noyau de p est l'ensemble des éléments x tels que $p(x) = 0$. C'est donc l'ensemble des $e \in E$ tel que si e s'écrit $f + g$, alors $f = 0$, donc l'ensemble des e tels $e = g \in G$. Le noyau de p est donc G.

3. Soit p_P la projection sur P parallèlement à D. Il faut réussir à décomposer un vecteur général $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ en une partie appartenant à P et une partie appartenant à D. Autrement dit on cherche trois nombres a, b, c tels que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

les deux premiers vecteurs correspondront à la projection sur le plan P par définition. On doit donc résoudre en a, b, c le système

$$x = a + c,$$
$$y = b + c,$$
$$z = a + b - c.$$

On obtient que $x + y - z = a + b + 2c - a - b + c = 3c$, on a donc déjà

$$c = \frac{x + y - z}{3}.$$

De la première équation on déduit

$$a = x - c = \frac{2x - y + z}{3}$$

et de la deuxième on déduit

$$b = y - c = \frac{-x + 2y + z}{3}.$$

La projection p_P est donc

$$p_P(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2x - y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-x + 2y + z}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, il s'agit d'une projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

4. soient $e_1, e_2 \in E$ deux vecteurs, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On décompose $e_1 = f_1 + g_1$ et $e_2 = f_2 + g_2$ avec $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. On a alors que

$$s(\lambda e_1 + \mu e_2) = s(\lambda f_1 + \lambda g_1 + \mu f_2 + \mu g_2) = s((\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)).$$

Par un raisonnement analogue à ce qui a été fait pour la projection, on a donc

$$s(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda f_1 + \mu f_2 - (\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda(f_1 - g_1) + \mu(f_2 - g_2) = \lambda s(e_1) + \mu s(e_2).$$

ce qui est la définition de dire que s est linéaire. De plus, $s \circ s(e_1) = s(f_1 - g_1)$. Or la décomposition unique de $f_1 - g_1$ sur la somme directe de F et G est $f_1 + (-g_1)$, donc $s(f_1 - g_1) = f_1 - (-g_1) = f_1 + g_1$, et on obtient $s \circ s(e_1) = e_1$, autrement dit $s \circ s = Id$. On voit donc que s est une application linéaire bijective d'inverse elle-même (on appelle ceci une involution), ce qui implique que son noyau est réduit à 0 et que son image est l'espace E tout entier.

5. Soit s_P la projection sur P parallèlement à D. On prend la décomposition donnée à la question 3:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

avec

$$a = x - c = \frac{2x - y + z}{3},$$
$$b = y - c = \frac{-x + 2y + z}{3}$$

et

$$c = \frac{x + y - z}{3}.$$

On a donc que

$$s_P(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2x - y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-x + 2y + z}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{x + y - z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - 2y + 2z \\ -2x + y + z \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$.