TD 1: Espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension finie.

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels réels?

1. $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{R}^+$.
3. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $x'(t)+\sqrt{t^2+e^{-t^5}}x(t)=0$ (on admet que l'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles est un espace vectoriel).
4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x'(t)+\sqrt{t^2+e^{-t^5}}x(t)=1$.
5. L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivables en tout point.
6. L'ensemble des suites réelles convergentes.
7. L'ensemble des suites réelles divergentes.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{((0,y)|y\in\mathbb{R}\}$.
2. $\{((0,y)|y\geqslant 0\}$.
3. $\{((0,y)|y\in\mathbb{R}\}\cup\{((x,0)|x\in\mathbb{R}\}$.
4. $\{((x,y)||x|=|y|\}$.
5. $\{((x,y)|x=y\}$.

Exercice 3. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^3$?

1. $F=Vect((0,1,0))$ et $G=Vect((1,1,1))$.
2. $F=Vect((0,1,0),(1,1,0))$ et $G=Vect(1,0,0)$.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des $f\in E$ vérifiant $f(0)=f'(0)=0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 5. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Donner leur rang. Sont-elles génératrices de l'espace vectoriel dans lequel elles sont inclues?

1. $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,0,5)\}\subset\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,2,5)\}\subset\mathbb{R}^3$.
3. $\{(1,0),(1,1),(2,5)\}\subset\mathbb{R}^2$.
4. $\{t\mapsto cos(t),t\mapsto sin(t)\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$).

Exercice 6. On considère les vecteurs $u=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-1\\h\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $w=\begin{pmatrix}k\\1\\\frac{h}{3}\end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ la famille $\{u,v,w\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de sous-espace vectoriel de dimension 0, de dimension 1, de dimension 2,... de dimension $n-1$.

Exercice 8. Les espaces vectoriels réels suivants sont-ils de dimension finie? Si oui, donner leur dimension et une base.

1. $\mathbb{C}$
2. L'ensemble des solutions de $x' + 2tx = 0$.
3. L'ensemble des suites réelles.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x + 5y\}$.

Exercice 9. On considère $a_0, \dots a_n$ $n+1$ nombres réels distincts et $b_0, \dots, b_n$ $n+1$ nombres réels (pas forcément distincts). On rappelle que l'ensemble des polynômes réels de dimension inférieure à n (noté $\mathbb{R}_n[X]$)est un espace vectoriel de dimension finie $n+1$.

1. Construire de manière explicite une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (notée $(L_0, \dots L_n)$) telle que pour tout $i \in [|0, n|]$ on a $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$.
2. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout i on ait $P(a_i) = b_i$ et l'expliciter. On pourra s'intéresser à l'application $P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots P(a_n))$.
4. Application: on considère la tableau suivant, qui donne la probabilité p qu'un piéton meure en étant écrasé par une voiture en fonction de la vitesse v de celle-ci.

v (km/h)	p
20	10%
40	30%
60	85%
80	100%

Quelle est la probabilité de mourir si la vitesse de la voiture est de 50 km/h? Et de 10 km/h? Comment expliquer ce dernier résultat?