TD 2: Applications linéaires, matrices, pivot de Gauss.

Exercice 1. Déterminer les rangs des familles de vecteurs (écrites sous formes matricielles, chaque colonne représentant un vecteur) suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On a trois lingots. Le premier contient 20 g d'or, 30 g d'argent et 40 g de cuivre. Le deuxième contient 30 g d'or, 40 g d'argent et 50 g de cuivre. Le troisième contient 40 g d'or, 50 g d'argent et 90 g de cuivre. Quel poids de chaque lingot doit-on prendre pour former un lingot qui renferme 34 g d'or, 46 g d'argent et 67 g de cuivre?

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Si oui, déterminer l'image, le noyau, le rang, une éventuelle injectivité, surjectivité, bijectivité, ainsi que leur matrice dans la base canonique.

1. $f(x, y, z) = (5x + 3y, 2xy + z)$
2. $f(x, y, z) = (x + 3y, 5x + 7z)$
3. $f(x, y, z) = (x + 2y, 3x + 5y + 2z, 5x + 6z, y)$
4. $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$ (polynôme dérivé de P).

Exercice 4.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère le plan P d'équation $z = x + y$. Rappeler sa dimension et en donner une base. Trouver un supplémentaire de P (i.e. trouver D tel que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$).

   Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($F \oplus G = E$). Tout élement de E se décompose de manière unique sous la forme $e = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

2. On appelle *projecteur sur F parallèlement* à G l'application suivante: $p : e = f + g \in E \mapsto f$. Montrer que c'est une application linéaire. Montrer qu'elle vérifie $p \circ p = p$. Quel est son noyau et son image?
3. Dans l'exemple précédent, on considère la projection sur P parallélement à D. Exprimer cette projection dans la base canonique. A quoi correspond-elle géométriquement?
4. On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement* à G l'application suivante: $s : e = f + g \mapsto f - g$. Montrer que c'est une application linéaire. Montrer qu'elle vérifie $s \circ s = Id$. Quel est son noyau et son image? Quel est le lien entre s et p?
5. Dans l'exemple précédent, on considère la symétrie sur P parallélement à D. Exprimer cette symétrie dans la base canonique. A quoi correspond-elle géométriquement?

Exercice 5. On considère E l'espace vectoriels des suites réelles et $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. f est-elle linéaire, injective, surjective? Déterminer son noyau et son image.

Exercice 6. Trois frères ont acheté une propriété pour 500000 euros. Il manque au premier, pour payer à lui seul cette acquisition, la moitié de ce qu'a le deuxième. Celui-ci payerait tout à lui seul s'il avait en plus le tiers de ce qu'a le premier. Enfin le troisième pour faire le paiement entier aurait besoin, en plus de ce qu'il a, du quart de ce que possède le premier. Combien chacun possède-t-il ?

Exercice 7. Calculer les produits matriciels AB et BA (quand c'est possible) dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = A$,

5. $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 65 & 44 & 87 & 78 \end{pmatrix}$,$B = A$.

Exercice 8. Déterminer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Trouver les inverses de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}.$$

Quelle conséquence "informatique" pouvez-vous en tirer?

Exercice 10. On considère deux matrices carrées A et B de taille n. On considère comme opération élémentaire sur les réels seulement l'opération $\times$.

1. Calculer de manière exacte le coût de la multiplication naïve de A par B.

2. On suppose dorénavant que $n = 2^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. On appelle $C = AB$. On décompose A et B, C en blocs de même taille sous la forme (M désigne A ou B ou C)

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2}. \end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de chacun des blocs? Calculer de $C_{i,j}$ en fonction des blocs de A et B; combien cela fait-il de multiplications de blocs?

3. On pose

$$\begin{array}{rc}
D_1 = & (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2}) \\
D_2 = & (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1} \\
D_3 = & A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2}) \\
D_4 = & A_{2,2}(B_{2,1} - B_{1,1}) \\
D_5 = & (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2} \\
D_6 = & (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2}) \\
D_7 = & (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2})
\end{array}.$$

   Exprimer les blocs $C_{i,j}$ en fonction des matrices D_k. Combien a-t-on maintenant de multiplications de blocs?

4. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, estimer le coût de cet algorithme.

5. Que faire si n n'est pas une puissance de 2?

6. Quel coût polynomial minimal peut-on espérer pour le coût de la multiplication de deux matrices?

Exercice 11. Soit A une matrice carrée réelle de taille n. On considère comme opérations élémentaire sur les réels seulement $\times$.

1. Estimer le coût en opérations élémentaires du calcul de l'inverse d'une matrice par la formule $A^{-1} = 1/det(A) * Com(A)^t$. Est-ce raisonnable?

2. Calculer précisément le coût de l'inversion d'une matrice par pivot de Gauss.

3. Comparer le coût de la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ par pivot de Gauss et le coût du calcul de $A^{-1}b$. Conclusion?

Exercice 12. Calculer les différents courants qui traversent ce circuit en fonction des données: