Corrections de la dernière question de l'exercice 8 et de l'exercice 9 de la feuille de TD numéro 3

Exercice 8

e) Comme expliqué lors du TD, on souhaite montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-0} - e^{-\infty} = 1.$$

Toutefois, on ne peut pas appliquer directement le théorème du cours permettant de passer à la limite grâce à la convergence uniforme car on travaille ici sur un intervalle non borné. Voici une manière de s'en sortir. On commence par remarquer que la question posée est équivalente à démontrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} g_n = 0.$$

De plus, on a d'une part que $g_n \geqslant 0$ (démontré dans une question précédente) et d'autre part que $g_n(x) \leqslant e^{-x}, \forall x \geqslant 0$ (évident d'après l'expression de g_n). On raisonne donc en revenant à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. On décompose l'intégrale sous la forme

$$\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{A} g_n + \int_A^{+\infty} g_n.$$

Grâce à l'inégalité $g_n(x) \leqslant e^{-x}$ appliquée sur $[A, +\infty]$ on déduit que

$$\int_A^{+\infty} g_n \leqslant \int_A^{+\infty} e^{-x}dx \leqslant e^{-A} - e^{-\infty} \leqslant e^{-A}.$$

Notamment, cette dernière quantité tendant vers 0 quand A tend vers $+\infty$, on en déduit que pour A suffisamment grand on a $e^{-A} \leqslant \varepsilon$ et donc $\int_A^{+\infty} g_n \leqslant \varepsilon$, ceci étant vrai pour tout n (ce qui est un point crucial). Mais grâce à la CVU de g_n vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ (et donc à fortiori sur $[0, A]$), on sait par théorème du cours (valable maintenant puisqu'on travaille sur un segment) qu'à A fixé on a $\int_0^A g_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $\int_0^A g_n \leqslant \varepsilon$. On en déduit donc en ajoutant le morceau d'intégrale sur $[A, +\infty[$ que pour $n \geqslant N$ on a $\int_0^{+\infty} g_n \leqslant 2\varepsilon$, ce qui est exactement la définition du fait que $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} g_n = 0$ puisque ε est choisi de manière arbitraire.

Exercice 9

1.

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (1+1)dx = 1 + x.$$

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x ((1+x) + (1+x^2))dx = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}.$$

On raisonne par récurrence sur n. f_0 et bien un polynôme. On suppose que f_n est un polynôme. Alors il est clair que $t \mapsto f_n(t^2)$ est aussi un polynôme, donc par linéarité $t \mapsto \frac{1}{2}(f_n(t^2) + f_n(t))$ est aussi un polynôme. L'intégrale d'un polynôme étant un polynôme et la fonction 1 aussi, on en déduit que f_{n+1} est aussi un polynôme.

2.

$$D_1 = \sup_{x\in[0,1/2]} |1 + x - 1| = \sup_{x\in[0,1/2]} x = \frac{1}{2}.$$

$$D_2 = \sup_{x\in[0,1/2]} |1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - 1 - x| = \sup_{x\in[0,1/2]} \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Intéressons-nous à $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$. En utilisant une inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^x f_{n+1}(t) + f_{n+1}(t^2) - f_n(t)f_n(t^2)dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^x |f_{n+1}(t) - f_n(t) + f_{n+1}(t^2) - f_n(t^2)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^x (|f_{n+1}(t) - f_n(t)| + |f_{n+1}(t^2) - f_n(t^2)|)dt.
\end{aligned}$$

Or $|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant D_n$ par définition et de même on a $|f_{n+1}(t^2) - f_n(t^2)| \leqslant D_n$ puisque $t^2 \in [0, 1/2]$ aussi. On en déduit

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^x 2D_n dx \leqslant D_n x \leqslant \frac{D_n}{2}$$

puisque $x \in [0, 1/2]$. On en déduit que par définition $D_{n+1} \leqslant \frac{D_n}{2}$, et une récurrence immédiate donne

$$D_n \leqslant \frac{D_1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

3. a) D'après la question 2, on a que $|u_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit donc la CVA par théorème de comparaison, puisque la série de terme général $\frac{1}{2^{k-1}}$ est bien convergente.
   b) On fixe un certain $x \in [0, 1/2]$ quelconque. La série de terme général $u_k(x)$ est absolument convergente donc convergente, autrement dit on a que $S_n(x) \to S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Puisque cette série est télescopique, on a bien $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x) - 1$, ce qui permet de conclure que $f_n(x)$ converge bien vers un certain nombre $f(x)$ et que de plus on a $S(x) = f(x) - 1$, autrement dit $f(x) = S(x) + 1$.
4. D'après la question 2 on sait que $|u_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit donc en utilisant une inégalité triangulaire et des résultats usuels sur les sommes de suites géométriques que

$$|f_p(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Ceci étant vrai pour tout x et tout p, on en déduit en faisant tendre p vers $+\infty$ (on rappelle que f_n CVS vers f) que pour tout x on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

autrement dit

$$||f - f_n||_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Le second membre tendant vers 0, on obtient bien que f_n CVU vers f. En revenant à la définition de f_n, on sait que

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))dt.$$

On sait maintenant que f_n CVU vers f. On en déduit facilement que $t \mapsto f_n(t^2)$ CVU vers $t \mapsto f(t^2)$ (il suffit de revenir à la définition de la CVU). En appliquant le théorème du cours sur l'interversion suite/intégrale, on en déduit que pour tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))dt = \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt.$$

Or il est clair par CVS que pour tout x on a $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = f(x)$, et on en déduit donc que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt,$$

ce qui répond au but initial de l'exercice.