TD 1: algèbre bilinéaire

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Un vecteur x est décomposé dans la base canonique en (x_1, x_2, x_3). Les formes suivantes sont-elles bilinéaires? Sont-elles symétriques? Sont-elles des produits scalaires?

1. $\varphi(x, y) = x_2y_3 - 2x_1y_3 - y_3 - x_3$,
2. $\varphi(x, y) = 5x_1y_3 - 3x_2x_3$,
3. $\varphi(x, y) = -x_1y_2 + x_3y_3 - x_2y_1$.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{C}^3$. Un vecteur x est décomposé dans la base canonique en (x_1, x_2, x_3). Les formes suivantes sont-elles sesquilinéaires? Sont-elles à symétrie hermitienne? Sont-elles des produits hermitiens?

1. $\varphi(x, y) = x_2\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2$,
2. $\varphi(x, y) = x_2y_3 + 5x_1\bar{y}_3$,
3. $\varphi(x, y) = ix_2\bar{y}_1 + iy_2\bar{x}_1$.

Exercice 3. Les formes suivantes définies sur $E \times E$ sont-elles des produits scalaires (cas réel) ou hermitiens (cas complexe)?

1. $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\bar{Q}(\mathrm{k})$.
2. $E = C^1([0, 1], \mathbb{R}) \cap \{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) | f(0) = 0\}$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 (f + f')(g + g')dx$.

Exercice 4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On considère le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ noté $\mathcal{P}_{a,b,c}$.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ce qui sera supposé par la suite.
2. Donner une base orthonormée de l'orthogonal de $\mathcal{P}_{a,b,c}$. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur ${\mathcal{P}_{a,b,c}}^{\perp}$.
3. On considère la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_{a,b,c}$, notée p, et la symétrie orthogonale sur ${\mathcal{P}_{a,b,c}}^{\perp}$, notée s. Montrer que $p(x, y, z) = (x, y, z) - (ax + by + cz)(a, b, c)$ et $s(x, y, z) = (x, y, z) - 2(ax + by + cz)(a, b, c)$.
4. En déduire les matrices de s et p dans la base canonique.
5. On considère le plan d'équation $x + y + z = 0$. Donner l'expression de la projection orthogonale sur ce plan et de la symétrie par rapport à ce plan. Représenter ces opérations sur un dessin.
6. Généralisation: on se place dans $\mathbb{R}^n$ et on considère l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n = 0$ avec $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur cet hyperplan et de la symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère le sev F décrit par les deux équations:

$$\begin{gathered} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{gathered}$$

1. Quelle est la dimension de F?
2. Donner une BON de F.
3. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur F.
4. Calculer la distance entre $(1, 0, 0, 0)$ et F.

Exercice 6. On considère $E = \mathbb{C}_2[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application suivante: $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)\bar{Q}(x)dx$.

1. Démontrer que φ est un produit hermitien.

2. Trouver une BON de E pour ce produit hermitien.

Exercice 7. Trouver $min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}} \int_0^1 (sin(x) - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Exercice 8. Soit $a < b$ deux réels. On considère l'application $\varphi : f \in C^0([a,b], \mathbb{R}^{+*}) \mapsto (\int_a^b f)(\int_a^b 1/f)$. A l'aide du théorème de Cauchy-Schwartz, montrer que ϕ admet pour minimum $(a-b)^2$ et trouver les fonctions réalisant ce minimum.

Exercice 9. On considère un échantillon x_n d'un signal ($n \in [|0, N-1]|]$ avec $N > 1$, et on notera $\widehat{x_n}$ sa transformée de Fourrier discrète. On notera x_{n-k} la suite translatée de x_n par le nombre k (au sens où au rang n, on a $x_{(n-k) mod N}$ de telle sorte de travailler toujours sur $[|0, N-1|]$: une fois qu'on est arrivé à $N-1$ on repart à 0). Exemple: x_{n-3} est l'échantillon $(x_{N-3}, x_{N-2}, x_{N-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

1. Exprimer $\widehat{x_n e^{\frac{2ik\pi n}{N}}}$ en fonction de $\widehat{x_{n-k}}$.

2. En déduire $\widehat{x_{n-k}}$ en fonction de $\widehat{x_k}$.