TD 2: Intégration

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{sin(t)}{1+cos^2(t)}dt, \int_0^{\pi/2} cos^4(t)dt, \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+sin(x)}dx, \int_0^1 \frac{3x+1}{(1+x)^2}dx.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes:

1.
$$\int\int_\Delta xydxdy$$
avec $\Delta = \big\{(x,y)|y \geqslant 0, (x+y)^2 \leqslant 2x/3\big\}$.

2.
$$\int\int_\Delta (x+y)sin(x)sin(y)dxdy$$
avec $\Delta = \{(x,y)|x,y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$.

Exercice 3. Primitiver les fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

1.
$$f(x) = \frac{1}{x^3-1}.$$

2.
$$f(x) = \frac{tan(x)}{1+tan(x)}$$
.

3.
$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

Exercice 4. 1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$ existe.

2. Montrer que $\frac{sin(t)}{t}$ n'est pas dans $L^1((1,+\infty))$.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle considéré?

1. $\frac{t^\alpha - 1}{ln(t)}$ sur $(0,1)$.
2. $\frac{1}{e^t + t^2e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $ln(\frac{1+t^2}{1+t^3})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. $ln(t)^\alpha t^\beta$ sur $(0,1)$.
5. $\frac{1}{1-\sqrt{t}}$ sur $(0,1)$.

Exercice 6. Calculer les limites de suites suivantes:

1.
$$u_n = \int_0^\infty (1+\frac{t}{n})^n e^{-2t}dt.$$

2. $$v_n = \int_0^n (1+\frac{t}{n})^n e^{-2t} dt.$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux bornée.
$$w_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt.$$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable.
$$x_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) sin(nt) dt.$$

Exercice 7. On présente plusieurs manières de calculer l'intégrale suivante:
$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.
2. Calculer
$$\int_{\mathbb{R}^{+*2}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$
3. En déduire la valeur de I.
4. On considère l'intégrale à paramètre suivante: $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$. Justifier que f est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis calculer sa dérivée.
5. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et faisant intervenir l'intégralez I puis la résoudre.
6. Que vaut $f(0)$? Quelle est la limite de f en $+\infty$?
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 8. Montrer que la fonction complexe suivante: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est définie pour $Re(z) > 0$ et continue. Montrer qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.

1. Comparer $||f||^2_{L^2((a,b))}$ et $\int_a^b xu(x)u'(x)dx$.
2. En déduire le principe d'incertitude de Heisenberg: $||f||^2_{L^2((a,b))} \leqslant 2||xf||_{L^2(I)}||f'||_{L^2((a,b))}$.

Exercice 10. On souhaite comparer les espaces L^p entre eux.

1. soit I un intervalle borné et $1 < p < q \leqslant +\infty$. Démonter que $L^q(I) \subset L^p(I)$.
2. Montrer que si I n'est plus borné, alors on a pas nécessairement $L^2(I) \subset L^1(I)$.
3. Montrer que si I n'est plus borné on a pas nécessairement $L^\infty(I) \subset L^1(I)$.
4. A-t-on pour I borné ou non $L^1(I) \subset L^\infty(I)$? A-t-on $L^1(I) \subset L^2(I)$?

Exercice 11. Soient $1 < p < \infty$ et soient p' l'unique nombre vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1. Soient $a > 0$, $b > 0$. Démontrer que $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.
2. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer que $ab \leqslant \frac{a^p\varepsilon^p}{p} + \frac{b^{p'}}{\varepsilon^{p'}p'}$.
3. Démontrer l'inégalité de Hölder: soit I un intervalle et $f \in L^p(I)$, $g \in L^{p'}(I)$, alors fg est intégrable et
$$||fg||_{L^1(I)} \leqslant ||f||_{L^p(I)}||g||_{L^q(I)}.$$
4. En déduire que $(L^p(I), ||.||_{L^p(I)})$ est un espace vectoriel normé.