## TD 3: coefficients de Fourier

**Exercice 1.** Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes, périodiques de période $2\pi$ :

1. $f_1(x) = -1$ pour $x \in [-\pi, 0[$ et $f_1(x) = 1$ pour $x \in [0, \pi[$.
2. $f_2(x) = x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.
3. $f_3(x) = 0$ pour $x \in [0, \pi]$ et $f_2(x) = \sin(x)$ pour $x \in ]\pi, 2\pi[$.
4. $f_4(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

**Exercice 2.** On considère la fonction périodique de période $\pi$ et paire telle que $f(x) = \pi x/2$ pour $x \in [0, \pi/2]$. Calculer ses coefficients de Fourier.

**Exercice 3.** Soit $f$ une fonction $L$-périodique telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in [-L/2, L/2[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. En déduire les sommes suivantes
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+2n)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+2n)^4}.$$

**Exercice 4.** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ pour $x \in [0, 2\pi[$ et soit $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de $f$ et de $g$.
2. En déduire que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\sin(n))^2}{n^2}.$$

**Exercice 5.** Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique telle que
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0], \\ 1 & \text{si } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Appliquer Parseval et déterminer la valeur de
$$\sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$
3. Retrouver ce résultat à partir de l'identité
$$\sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
4. Dessiner le graphe de la fonction $t \mapsto f(x-t)$ pour $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$ et $x = -\pi$.
5. Calculer $f * f$ aux points $0$, $\pi/2$, $\pi$ et $-\pi$.
6. Déterminer la fonction $f * f$ et tracer son graphe.
7. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n$ de $f * f$. En déduire ses coefficients de Fourier complexes $c_n$.
8. Comparer les coefficients de Fourier complexes de $f$ et de $f * f$.
9. Calculer $f^2$. Déterminer ses coefficients de Fourier complexes.