ELI Contôle du lundi 3 janvier 2011

Durée 1h. Documents autorisés.

1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, 2π-périodique, définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$.

1.1. Représenter sommairement le graphe de la fonction f.

1.2. Déterminer les coefficients de Fourier c_n, a_n, b_n de f (notations du cours).

1.3. Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

2

On considère l'espace L^2 des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodiques de période 2π, de carré intégrable. Le produit scalaire hermitien est défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\bar{g}(t)dt$, pour lequel la famille $e_k : t \mapsto e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$, est orthonormée.

On note E_N l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N (c'est à dire l'espace engendré par les combinaisons linéaires de e_k, pour $|k| \leq N$).

Par ailleurs on note $f * g$ la fonction définie par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Les questions suivantes sont très largement indépendantes.

2.1. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on note s_l la fonction $t \mapsto sin(lt)$, et c_l la fonction $t \mapsto cos(lt)$. On note c_0 la fonction constante égale à 1. Expliquer pourquoi E_N est aussi l'espace engendré par les fonctions $c_0, s_l, c_l, l \in \{1, \ldots, N\}$.

2.2. Linéariser le produit $cos(a)cos(b)$.

2.3. Soient k, l, N des entiers strictement positifs. Déterminer la projection orthogonale sur E_N de la fonction $t \mapsto c_k(t)c_l(t)$.

2.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tous k, l entiers strictement positifs, calculer $c_l * c_k(x)$.

2.5. Pour tous k, l, N entiers strictement positifs, déterminer la projection orthogonale sur E_N de la fonction $c_k * c_l$.