Corrigé sommaire de l'examen d'analyse hilbertienne de 2011

Exercice 1. 1. Faire apparaître quelques périodes sur le dessin.

2. On applique la définition de $c_n(f)$ et on trouve

$$c_n(f) = \frac{(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1-in)}.$$

Pour la valeur moyenne, on trouve

$$a_0(f) = \frac{2sh(\pi)}{\pi}.$$

Pour les coefficients a_n et b_n, pas besoin de refaire tous les calculs, on utilise les relations

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$b_n(f) = \frac{c_n(f) - c_{-n}(f)}{i}.$$

Après quelques petits calculs, on trouve

$$a_n(f) = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$$

et

$$b_n(f) = \frac{-2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

3. Il faut utiliser Parceval, par exemple la version complexe, et faire bien attention aux indices. En effet, dans Parceval complexe on a une somme sur $\mathbb{Z}$ et on nous demande ici la somme sur $\mathbb{N}^*$. On trouve que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi sh(2\pi)}{2sh(\pi)} = \frac{\pi 2ch(\pi)sh(\pi)}{2sh(\pi)} = \frac{\pi}{th(\pi)}.$$

Or

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1$$

donc finalement on a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{th(\pi)} - 1\right).$$

Exercice 2. 1. Voici la meilleure manière de rédiger cette question:

(a) On a que $e_k = c_k + s_k$ si $k \neq 0$ et $e_0 = c_0$. Donc $Vect(e_k) \subset Vect(c_0, c_k, s_k)$ (tout e_k s'écrit comme combinaison linéaire de certains c_0, c_l, s_l.)

(b) Inversément par Moivre on a que $c_0 = e_0$ et si $k > 0$ on a $c_k = \frac{e_k + e_{-k}}{2}$ et $s_k = \frac{e_k - e_{-k}}{2i}$. Donc $Vect(c_0, c_k, s_k) \subset Vect(e_k)$ (tout c_0, c_k, s_k s'écrit comme combinaison linéaire de certains e_l .)

2.

$$cos(a)cos(b) = \frac{cos(a+b) + cos(a-b)}{2}.$$

3. Cette question est assez calculatoire. Attention aux indices. On note P la projection orthogonale recherchée. Comme, e_j ($j \in [-N, N]$) forme un base orthonormale de l'espace E_N, la projection vaut

$$P(c_k c_l) = \sum_{j=-N}^{N} < c_k c_l, e_j > e_j.$$

Il faut donc calculer $< c_k c_l, e_j >$, autrement dit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi} \pi cos(kt) cos(lt) e^{-jt} dt.$$

La méthode est la suivante: on linéaire le produit de cosinus, ensuite on passe en notation exponentielle pour se ramener uniquement à des éléments e la forme e_l pour un certain l, puis on se rappelle que les e_l sont orthogonaux entre eux (donc $< e_l, e_m >= 0$ si $l \neq m$ et vaut 1 si $m = l$). Finalement, on a seulement 4 modes qui sont non nuls: $j = k + l, j = -k - l, j = k - l, j = k + l$, et le résultat du calcul de l'intégrale donne 1/2. La projection sécrit donc

$$P(c_k c_l) = \frac{e_{l+k} + e_{-l+k} + e_{l-k} + e_{k-l}}{2}.$$

4. Attention à la définition du produit de convolution.

$$c_k * c_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} cos(kt) cos(l(x-t)) dt.$$

On linéarise. On trouve

$$c_k * c_l(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (cos(kx + (k-l)t) + cos(kx - 2kt)) dt.$$

Le terme en $cos(kx - 2kt)$ donne une intégrale nulle dans tous les cas. Le premier terme donne une intégrale nulle en temps si $k = l$, mais sinon on intègre $cos(kx)$ par rapport à t donc ca donne $2\pi cos(kt)$. Donc

$$c_k * c_l(x) = 0$$

si $k \neq l$ et

$$c_k * c_l(x) = \frac{cos(kx}{2}.$$

5. si $k \neq l$ la projection est nulle. Si $k = l$, comme

$$c_k * c_k(x) = \frac{cos(kx)}{2} = \frac{1}{4}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \tag{1}$$

il y a deux cas à distinguer:

   (a) Si $|k| \leqslant N$, la fonction $c_k * c_k$ appartient déjà à l'espace E_n grâce à la relation (1), donc sa projection orthogonale est elle-même: $P(c_k * c_k) = c_k * c_k = \frac{x \mapsto cos(kx)}{2}$.

   (b) Si $k > N$, au vue de l'expression (1) la fonction $c_k * c_k$ n'a que deux modes de Fourier en k et $-k$ donc son produit scalaire avec n'importe lequel des e_j pour $|j| \neq k$ est nul. Notamment ici j ne peut être égal à k puisqu'on a supposé que $k > N$ et nécessairement $j \leqslant N$ pour que $e_j \in E_N$. Donc on a que $P(c_k * c_k) = 0$.