ELI 3: CONTÔLE DE MATHS DU 9 JANVIER 2012

DURÉE : 1H30. TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS.

Exercice 1

A) Est-ce que la fonction $t \mapsto exp(t)$ définit un élément de $L^2(\mathbb{R})$?

B) Montrer que la restriction de cette fonction à l'intervalle $]-\pi,\pi[$. détermine un élément de $L^2(]-\pi,\pi[)$, que l'on notera f.

C) Pour tout $n \in$, on note e_n l'élément de $L^2(]-\pi,\pi[)$ représenté par la fonction $t \mapsto exp(int)$. On rappelle que le produit scalaire hermitien sur $L_2(]-\pi,\pi[)$ est défini par $\langle g,h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(\bar{t})dt$. Calculer $||f||_2$.

D) Calculer $\langle f, e_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

E) En déduire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

F) Soit g le vecteur de $L^2(]-\pi,\pi[)$ représenté par la fonction $t \mapsto cos(3t)$. Déterminer la projection orthogonale de f sur la droite dirigée par g.

Exercice 2

A) Linéariser l'expression $sin(a)sin(b)$.

B) On rappelle que, étant donné deux fonctions f et g périodiques (de période 2π), on note $f * g$ la fonction définie par la formule

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,\pi[} f(s)g(s-t)ds.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f : t \mapsto sin(kt)$. Pour tout $k,l \in \mathbb{N}$, on pose $h_{k,l} = f_k * f_l$. Calculer $h_{k,l}(t)$.

C) Déterminer les coefficients de Fourier de f_k, f_l et de $h_{k,l}$, pour tout $k,l \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

B) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

C) Exprimer $||f_n||_1$ en fonction de $||f_1||_1$.

D) Déterminer la limite de la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.