Corrigé sommaire de l'examen d'analyse hilbertienne de 2012

Exercice 1. 1. On doit voir si la quantité $||f||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{2t}dt$ existe. Soit $a > 0$. $\int_{-a}^{a} e^{2t}dt = \frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2} \to +\infty$ quand $a \to \infty$ donc la fonction ne peut être intégrale.

2. f est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ fermé donc elle est intégrable sur $(-\pi, \pi)$. On a de plus que

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi} \pi e^{2t}dt = \frac{sh(2\pi)}{2\pi}.$$

Donc $||f||_2 = \sqrt{\frac{sh(2\pi)}{2\pi}}$.

3. On applique la définition du produit scalaire

$$< f, e_n >= c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}$$

et on trouve après quelques calculs faciles

$$< e_n, f >= \frac{(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1-in)}.$$

Pour la valeur moyenne, on trouve

4. Il faut utiliser Parceval version complexe, et faire bien attention aux indices. En effet, dans Parceval complexe on a une somme sur $\mathbb{Z}$ et on nous demande ici la somme sur $\mathbb{N}$. On trouve que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi sh(2\pi)}{2sh(\pi)} = \frac{\pi 2ch(\pi)sh(\pi)}{2sh(\pi)} = \frac{\pi}{th(\pi)}.$$

Or

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1$$

donc finalement on a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} - 1) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{th(\pi)} - 1).$$

Pour trouver la somme de 0 à ∞ il suffit de calculer le terme en $n = 0$ que l'on connait, il vaut 1. Finalement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{th(\pi)} + 1).$$

5. On applique la formule habituelle de projection. Pour cela il faut trouver une base orthogonale de la droite engendrée par $cos(3t)$, autrement dit un vecteur de norme 1. On remarque que la fonction $cos(3t)$ elle-même ne fonctionne pas. On a que

$$||cos(3t)||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(3t)dt = \frac{1}{2}$$

donc $||cos(3t)||_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour trouver un vecteur normé, il suffit de diviser $cos(3t)$ par sa norme, autrement dit $\sqrt{2}cos(3t)$ est bien de norme 1. On applique donc maintenant la formule

$$P_{Vect(g)}(f) =< f, \sqrt{2}cos(3t) > \sqrt{2}cos(3t) = 2 < f, cos(3t) > cos(3t).$$

Il reste à calculer

$$< f, cos(3t) >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t cos(3t)dt.$$

C'est facile, soit on utilise Moivre soit on dit que c'est la partie réelle de e^{t+3it}. On trouve finalement

$$< f, cos(3t) >= \frac{-sh(\pi)}{10\pi}.$$

et donc la projection orthogonale est

$$P_{Vect(g)}(f) = \frac{-sh(\pi)cos(3t)}{2\pi}.$$

Exercice 2. 1.

$$sin(a)sin(b) = \frac{cos(a-b) - cos(a+b)}{2}.$$

2. Attention au sens du produit de convolution. On utilise la formule de linéarisation.

$$h_{k,l}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin(kt)sin(l(x-t))dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} cos((k+l)t+kx) - cos((k-l)t+kx)dt.$$

   Si $k \neq l$ on vérifie que l'on trouve 0. si $k = l$ on vérifie facilement que l'on trouve $-1/2$.

3. On prend les coefficients de Fourier réels. Pour f_k, on a que tous les coefficients sont nuls sauf $b_k(f_k)$ qui vaut $1/2$. Idem pour f_l. On remarquera que pour les coefficients réels on n'a pas la formule $b_k(f*g) = b_k(f)b_k(g)$ vraie seulement pour le cas complexe.

Exercice 3. 1. si $x = 0$ cela vaut 1. Si $x \neq 0$ on a que $e^{-nx^2} \to 0$.

2. On écrit ce que vaut $||f_n||_1$.

$$||f_n||_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}.$$

   On fait le changement de variables $\sqrt{n}x = t$, de telle sorte que $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$. Les bornes ne bougent pas, on a donc que

$$||f_n||_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \frac{||f_1||_1}{\sqrt{n}}.$$

3. Dans l'expression précédente, $||f_1||_1$ est une quantité qui ne dépend plus de n, donc de manière immédiate $||f_n||_1 \to 0$ si $n \to \infty$. On peut aussi faire par convergence dominée mais ce n'est pas dans l'esprit de l'exercice.