TD 2: Intégration

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^{\pi/2} cos^4(t)dt$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{sin(t)}{1+cos^2(x)}dx$
3. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(1+x)^2}dx$

Exercice 2. Primitiver les fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

1. $$f(x) = \frac{1}{x^3-1}.$$
2. $$f(x) = \frac{tan(x)}{1+tan(x)}$$
   .
3. $$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

Exercice 3. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle considéré?

1. $\frac{1}{1-\sqrt{t}}$ sur $(0,1)$.
2. $\dfrac{1}{e^t+t^2e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\dfrac{t^\alpha - 1}{ln(t)}$ sur $(0,1)$.
4. $ln(\dfrac{1+t^2}{1+t^3})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 4. Calculer les limites de suites suivantes:

1. $$u_n = \int_0^\infty (1+\frac{t}{n})^n e^{-2t}dt.$$
2. $$v_n = \int_0^n (1+\frac{t}{n})^n e^{-2t}dt.$$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable.
   $$x_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)sin(nt)dt.$$

Exercice 5. On présente plusieurs manières de calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.

2. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^{+*2}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

3. En déduire la valeur de I.

4. On considère l'intégrale à paramètre suivante: $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$. Justifier que f est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis calculer sa dérivée.

5. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et faisant intervenir l'intégrale I puis la résoudre.

6. Que vaut $f(0)$? Quelle est la limite de f en $+\infty$?

7. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.

1. Comparer $||f||^2_{L^2((a,b))}$ et $\int_a^b xu(x)u'(x)dx$.

2. En déduire le principe d'incertitude de Heisenberg: $||f||^2_{L^2((a,b))} \leqslant 2||xf||_{L^2(I)}||f'||_{L^2((a,b))}$.

Exercice 7. On souhaite comparer les espaces L^1, L^2, L^∞ entre eux.

1. soit I un intervalle borné. Démontrer que $L^2(I) \subset L^1(I)$. Démontrer que $L^\infty(I) \subset L^2(I)$.

2. Montrer que si I n'est plus borné, alors on n'a pas nécessairement $L^2(I) \subset L^1(I)$.

3. Montrer que si I n'est plus borné on n'a pas nécessairement $L^\infty(I) \subset L^1(I)$.

4. A-t-on pour I borné ou non $L^1(I) \subset L^\infty(I)$? A-t-on $L^1(I) \subset L^2(I)$?