TD 1: algèbre bilinéaire

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Un vecteur x est décomposé dans la base canonique en (x_1, x_2, x_3). Les formes suivantes sont-elles bilinéaires? Si c'est le cas, sont-elles symétriques? Sont-elles des produits scalaires?

1. $\varphi(x, y) = x_2y_3 - 2x_1y_3 - y_3 - x_3$,
2. $\varphi(x, y) = 5x_1y_3 - 3x_2x_3$,
3. $\varphi(x, y) = -x_1y_2 + x_3y_3 - x_2y_1$.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{C}^3$. Un vecteur x est décomposé dans la base canonique en (x_1, x_2, x_3). Les formes suivantes sont-elles sesquilinéaires? Si c'est le cas, sont-elles à symétrie hermitienne? Sont-elles des produits hermitiens?

1. $\varphi(x, y) = x_2\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2$,
2. $\varphi(x, y) = x_2y_3 + 5x_1\bar{y}_3$,
3. $\varphi(x, y) = ix_2\bar{y}_1 + iy_2\bar{x}_1$.

Exercice 3. Les formes suivantes définies sur $E \times E$ sont-elles des produits scalaires (cas réel) ou hermitiens (cas complexe)?

1. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.
2. $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 f\bar{g}dx$.

Exercice 4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On considère le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ noté $\mathcal{P}_{a,b,c}$, et on supposera que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

1. Déterminer ${\mathcal{P}_{a,b,c}}^{\perp}$, noté dorénavant $\mathcal{D}_{a,b,c}$. Donner une base orthonormée de $\mathcal{D}_{a,b,c}$. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_{a,b,c}$ (notée $p_{\mathcal{D}}$).
2. On considère la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_{a,b,c}$, notée p, et la symétrie orthogonale sur $\mathcal{P}_{a,b,c}$, notée s. Montrer que $p(x, y, z) = (x, y, z) - (ax + by + cz)(a, b, c)$ et $s(x, y, z) = (x, y, z) - 2(ax + by + cz)(a, b, c)$. On pourra démontrer que $s = 2p - Id$.
3. En déduire les matrices de s et p dans la base canonique.
4. On considère le plan d'équation $x + y + z = 0$. Donner l'expression de la projection orthogonale sur ce plan et de la symétrie par rapport à ce plan.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère le sev F décrit par les deux équations:

$$x + y + z + t = 0$$
$$x + 2y + 3z + 4t = 0$$

1. Quelle est la dimension de F?
2. Donner une base orthonormée de F pour ce produit scalaire.
3. En déduire l'expression de la projection orthogonale sur F.
4. Calculer la distance entre $(1, 0, 0, 0)$ et F.

Exercice 6. On considère $E = \mathbb{C}_2[X]$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application suivante: $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)\bar{Q}(x)dx$.

1. Démontrer que φ est un produit hermitien.
2. Trouver une base orthonormée de E pour ce produit hermitien.

Exercice 7. Trouver $min_{(a,b)\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (sin(x) - ax - b)^2 dx$.

Exercice 8.

1. On considère un nuage de N points (x_i, y_i) (les x_i étant supposés distincts). A l'aide d'une projection orthogonale bien choisie, trouver une droite "approchant" ces points le mieux possible. Donner une expression de la pente et de l'ordonnée à l'origine de cette droite en fonction des (x_i, y_i).

On considère maintenant $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On s'intéresse à un système linéaire $Ax = b$ que l'on souhaite résoudre de manière approchée, en étant le plus précis possible. Notamment, on souhaite que $||Ax - b||$ (norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$) soit minimale.

2. A quelle condition nécessaire et suffisante sur b le système $Ax = b$ a-t-il une solution?

3. Supposons $b \notin Im(A)$. Quel vecteur de $Im(A)$ approche le plus b? On notera dorénavant $proj(b)$ ce vecteur. Quel système linéaire peut-on résoudre pour trouver une solution approchée?

4. Montrer que dans ce cas, $Ax - b$ est orthogonal à l'image de A. Comparer $Im(A)^{\perp}$ et $Ker(A^T)$.

5. Démontrer que $A^T Ax = A^T b$. Ce système a-t-il toujours une solution?

Cette dernière équation est appelée équation normale associée au système linéaire $Ax = b$.