TD 2: Intégration

Exercice 1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in (0, 2\pi)$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$.

2. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} cos(\frac{k\pi}{2n})$.

3. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} cos(\frac{k\pi}{2n}) = \int_0^{\pi/2} cos(t)dt.$$

Expliquer ce résultat à l'aide d'un dessin.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^{\pi/2} cos^4(t)dt$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}dx$
3. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(1+x)^2}dx$

Exercice 3. Primitiver les fonctions suivantes sur leur domaine de définition:

1. $$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

2. $$f(x) = \frac{tan(x)}{1 + tan(x)}$$
.

3. $$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

Exercice 4. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle considéré?

1. $\frac{1}{1-\sqrt{t}}$ sur $(0, 1)$.
2. $\dfrac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\dfrac{t^\alpha - 1}{ln(t)}$ sur $(0, 1)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $ln(\dfrac{1+t^2}{1+t^3})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 5. Calculer les limites de suites suivantes:

1. $$u_n = \int_0^\infty (1 + \frac{t}{n})^n e^{-2t}dt.$$

2. $$v_n = \int_0^n (1 + \frac{t}{n})^n e^{-2t}dt.$$

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable.

$$x_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)sin(nt)dt.$$

Exercice 6. On se propsoe de calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.
2. On considère l'intégrale à paramètre suivante: $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}dx$. Justifier que f est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis calculer sa dérivée.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et faisant intervenir l'intégrale I puis la résoudre.
4. Que vaut $f(0)$? Quelle est la limite de f en $+\infty$?
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 7. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

1. Comparer $||f||^2_{L^2((a,b))}$ et $\int_a^b xu(x)u'(x)dx$.
2. En déduire le principe d'incertitude de Heisenberg: $||f||^2_{L^2((a,b))} \leqslant 2||xf||_{L^2(a,b)}||f'||_{L^2((a,b))}$.

Exercice 8. On souhaite comparer les espaces L^1, L^2, L^∞ entre eux.

1. soit I un intervalle borné. Démontrer que $L^2(I)\subset L^1(I)$. Démontrer que $L^\infty(I)\subset L^2(I)$.
2. Montrer que si I n'est plus borné, alors on n'a pas nécessairement $L^2(I)\subset L^1(I)$.
3. Montrer que si I n'est plus borné on n'a pas nécessairement $L^\infty(I)\subset L^1(I)$.
4. A-t-on pour I borné ou non $L^1(I)\subset L^\infty(I)$? A-t-on $L^1(I)\subset L^2(I)$?