Université Paris-Dauphine | Méthodes numériques pour les équations d'évolution
Master MMD-MA | 2015/2016

TD 1: équations différentielles ordinaires (EDO)

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$. Soit x_0 un réel supposé positif ou nul. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$x'(t) = \max(x(t), 0)^{\alpha}, \; x(0) = x_0,$$

défini sur $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Trouver f tel que l'équation s'écrive sous la forme $x'(t) = f(t, x(t))$. Vérifier que f est bien définie sur Ω. Cette équation est-elle linéaire? Autonome?
2. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Peano-Arzela s'applique-t-il?
3. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Lipschitz (version locale) s'applique-t-il?
4. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale) s'applique-t-il?
5. On suppose $\alpha > 1$. Démontrer qu'il existe des solutions non globales.
6. On suppose $\alpha < 1$. Démontrer que le problème de Cauchy a une infinité de solutions globales si $x_0 = 0$.

Exercice 2. On considère un problème de Cauchy scalaire

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

où f est supposée définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, de constante de Lipschitz Λ. On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur un l'intervalle de temps $[0, 1]$. On se donne un N destiné à tendre vers $+\infty$ et une la grille usuelle de discrétisation à pas constant $t_n = n/N = nh$, avec $h = 1/N$ le pas de dicrétisation. On considère le schéma d'approximation numérique suivant:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}). \tag{2}$$

On rappelle le théorème suivant, dit théorème du point fixe de Picard: Si E est un espace de Banach et $f : E \to E$ une application strictement contractante (i.e. lipschtizienne de constante de Lipschitz $k < 1$), alors f admet un unique point fixe.

1. Est-ce un schéma à un pas? Est-ce un schéma explicite? Quelles sont les difficultés théoriques et pratiques de mise en oeuvre de ce schéma? De quelle méthode de quadrature pour le calcul des intégrales est-il issu?
2. Donner une condition suffisante sur h qui assure qu'à x_n donné, il existe une unique solution x_{n+1} à l'équation (2). Démontrer que cette condition est aussi "nécessaire" dans le sens où il existe des f pour lesquels l'existence ou l'unicité de la solution n'est pas assurée si cette condition n'est pas assurée. On pourra considérer $f(t, x) := \Lambda x$. Quelles difficultés pratiques cette condition peut-elle entraîner?
3. Reprendre les calculs faits en cours sur la méthode d'Euler explicite, et démontrer la convergence d'un tel schéma.

Ce schéma est appelé *schéma d'Euler implicite*.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3y - 1, \\ y(0) &= 1/3. \end{aligned} \tag{3}$$

1. Trouver la solution exacte à ce problème de Cauchy.
2. On suppose que la condition initiale est perturbée par un petit $\varepsilon > 0$. Donner la solution exacte au problème de Cauchy. Comparer la solution exacte et perturbée au temps $t = 10$.

3. Pour $\varepsilon = 10^{-10}$, peut-on considérer que la solution exacte est beaucoup ou peu perturbée? Quelles sont les conséquences au niveau de l'approximation numérique?

Un tel problème est dit *numériquement mal posé*: une petite perturbation sur le problème exact (par exemple des erreurs d'arrondis) peut induire de grosses perturbations sur la solution approchée.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy scalaire

$$\begin{aligned} x'(t) &= f((t, x(t)), \\ x(0) &= x^0, \end{aligned}$$

où f est supposée globalement lipschitzienne de constante de Lipschitz Λ, et la méthode d'approximation suivante:

$$x_{n+1} = x_n + h/2(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})).$$

1. S'agit-il d'un schéma explicite ou implicite?
2. Donner une condition suffisante sur le pas pour que ce schéma ait un sens (on pourra s'inspirer de l'exercice 2). On supposera dorénavant cette condition vérifiée.
3. Démontrer que ce schéma est convergent. On admettra que l'on peut dans ce cas utiliser les notions et théorèmes vus dans le cas des méthodes explicites.
4. Déterminer son ordre. Commenter.

Exercice 5.

On considère le problème de Cauchy scalaire

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t), \\ x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

1. Démontrer que l'application d'une méthode de Runge-Kutta explicite à s niveaux pour la résolution numérique de ce problème conduit à ce que $x_{n+1} = P(h)x_n$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à s.
2. En déduire que l'ordre d'une telle méthode ne peut être supérieur à s.
3. Pour $s = 1, 2$, démontrer qu'il existe des méthodes explicites d'ordre s.

Remarque: Ceci est toujours vrai pour $s = 3, 4$, mais devient faux à partir de $s = 5$: pour $s = 5, 6, 7$, l'ordre maximal est $s - 1$, pour $s = 8, 9$, il est égal à $s - 2$, pour $s \geqslant 10$ il est inférieur à $s - 2$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, associée à la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, où f est supposée suffisamment régulière (par exemple de classe C^∞. On notera dans la suite h un pas de discrétisation, et $t_n := nT/h$. On considère le schéma défini par

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h).$$

Démontrer que ce schéma est d'ordre p si et seulement si on a, pour tout $k \leqslant p - 1$:

$$\frac{\partial^k}{\partial h^l}\Phi(t, x, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, x),$$

où $f^{[l]}$ est définie par récurrence par $f^{[0]} = f$ et $f^{[l+1]} = \frac{\partial f^{[l]}}{\partial t} + f\frac{\partial f^{[l]}}{\partial x}$.

Indication: Démontrer $x^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, x(t))$ et utiliser la définition de l'erreur de consistance.

Exercice 7. On considère la méthode RK4, dite *méthode de Runge-Kutta "classique" d'ordre* 4, dont le tableau de Butcher est le suivant:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}.$$

1. Montrer que cette méthode est convergente. Ecrire explicitement l'algorithme décrivant cette méthode. Quel intérêt voyez-vous à cette méthode?

2. Pour chacun des 4 niveaux , reconnaître la méthode de quadrature pour les calculs d'intégrales dont est issue le schéma.

3. Déterminer exactement l'ordre de cette méthode. On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 8.

1. Démontrer que la région de stabilité d'une méthode de Runge-Kutta explicite est nécessairement bornée. Un tel schéma peut-il être A-stable?

2. Donner le domaine de stabilité de la méthode décrite à l'Exercice 4. Ce schéma est-il A-stable?

Exercice 9. On s'intéresse au schéma multi-pas dit de Nyström $x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(t_n, x_n)$.

1. Expliquer par un dessin d'où vient ce schéma.

2. Expliciter les α_i, β_i.

3. Quel est son ordre?

4. Est-il stable?

5. Démontrer qu'il n'est pas A-stable.

Exercice 10 (Examen de septembre 2015)**.** Soit f une fonction définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, supposée globalement uniformément lipschtizienne de constante de Lipschitz Λ par rapport à la seconde variable et suffisamment régulière (par exemple de classe C^∞ avec toutes les dérivées bornées). On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, associée à la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. On notera dans la suite h un pas de discrétisation, et $t_n := nT/h$. Soit α, β, γ trois nombres compris entre 0 et 1. On considère le schéma défini par

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$$

avec

$$\Phi(t, x, h) := \alpha f(t, x) + \beta f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t, x)) + \gamma f(t + h, x + hf(t, x)).$$

1. S'agit-t-il en général d'un schéma de type Runge-Kutta? Pourquoi?

2. Pour quelles valeurs des paramètres α, β, γ retrouve-t-on la méthode d'Euler? La méthode du point milieu?

3. Démontrer proprement que ce schéma est stable.

4. Quelle(s) relation(s) doi(ven)t vérifier α, β, γ pour que le schéma soit consistant? Convergent? D'ordre au moins 1?

5. Démontrer que
$$f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2})) = f(t_n, x(t_n)) + \frac{h}{2} x''(t_n) + O(h^2)$$
et
$$f(t_n + h, x(t_n + h)) = f(t_n, x(t_n)) + hx''(t_n) + O(h^2).$$

6. Démontrer que
$$x(t_n + \frac{h}{2}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) = O(h^2).$$
En déduire que
$$\beta hf(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n) + \frac{h}{2} f(t, x(t_n))) - \beta hf(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2})) = O(h^3).$$

7. De même, démontrer que
$$\gamma hf(t_n + h, x + hf(t, x(t_n))) - \gamma hf(t_n + h, x(t_n + h)) = O(h^3).$$

8. En utilisant les questions précédentes, donner une condition sur α, β, γ pour que le schéma soit d'ordre au moins 2. Donner un exemple de α, β, γ (autre que le point milieu) tel que le schéma est d'ordre 2.

9. Calculer la région de stabilité de ce schéma et reconnaître un objet géométrique. Ce schéma est-il A-stable?