TD 1: équations différentielles ordinaires (EDO)

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$x'(t) = \max(x(t), 0)^\alpha, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

défini sur $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Trouver f tel que l'équation (1) s'écrive sous la forme $x'(t) = f(t, x(t))$. Cette équation est-elle linéaire? Autonome?
2. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Peano-Arzela s'applique-t-il?
3. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Lipschitz (version locale) s'applique-t-il?
4. Pour quelles valeurs de α le théorème de Cauchy-Lipschitz (version globale) s'applique-t-il?
5. On suppose $\alpha > 1$. Démontrer qu'il existe des solutions à (1) non globales.
6. On suppose $\alpha < 1$. Démontrer que le problème de Cauchy (1) a une infinité de solutions globales si $x_0 = 0$.

Exercice 2. On considère un problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où f est supposée définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, de constante de Lipschitz Λ. On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur un l'intervalle de temps $[0, 1]$. On se donne un N destiné à tendre vers $+\infty$ et une la grille usuelle de discrétisation à pas constant $t_n = n/N = nh$, avec $h = 1/N$ le pas de dicrétisation. On considère le schéma d'approximation numérique suivant:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}). \tag{2}$$

On rappelle le théorème suivant, dit théorème du point fixe de Picard: Si E est un espace de Banach et $f : E \to E$ une application strictement contractante (i.e. lipschitzienne de constante de Lipschitz $k < 1$), alors f admet un unique point fixe.

1. Est-ce un schéma à un pas? Est-ce un schéma explicite? Quelles sont les difficultés théoriques et pratiques de mise en oeuvre de ce schéma? De quelle méthode de quadrature pour le calcul des intégrales est-il issu?
2. Donner une condition suffisante sur h qui assure qu'à x_n donné, il existe une unique solution x_{n+1} à l'équation (2). Démontrer que cette condition est aussi "nécessaire" dans le sens où il existe des f pour lesquels l'existence ou l'unicité de la solution n'est pas assurée si cette condition n'est pas assurée. On pourra considérer $f(t, x) := \Lambda x$. Quelles difficultés pratiques cette condition peut-elle entraîner?
3. Reprendre les calculs faits en cours sur la méthode d'Euler explicite, et démontrer la convergence d'un tel schéma.

Ce schéma est appelé *schéma d'Euler implicite*.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = 3y - 1, \\ y(0) = 1/3. \end{cases} \tag{3}$$

1. Trouver la solution exacte au problème de Cauchy (3).
2. On suppose que la condition initiale est perturbée par un petit $\varepsilon > 0$. Donner la solution exacte au problème de Cauchy. Comparer la solution exacte et perturbée au temps $t = 10$.

3. Pour $\varepsilon = 10^{-10}$, peut-on considérer que la solution exacte est beaucoup ou peu perturbée? Quelles sont les conséquences au niveau de l'approximation numérique?

Un tel problème est dit *numériquement mal posé.*

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = f((t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où f est supposée globalement lipschitzienne de constante de Lipschitz Λ, et la méthode d'approximation suivante:

$$x_{n+1} = x_n + h/2(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})).$$

1. S'agit-il d'un schéma explicite ou implicite?
2. Donner une condition suffisante sur le pas pour que ce schéma ait un sens (on pourra s'inspirer de l'exercice 2). On supposera dorénavant cette condition vérifiée et on admettra que le schéma est convergent sous cette condition.
3. Déterminer son ordre. Commenter.

Exercice 5.

On considère le problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

1. Démontrer que l'application d'une méthode de Runge-Kutta explicite à s niveaux pour la résolution numérique de ce problème conduit à ce que $x_{n+1} = P(h)x_n$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à s.
2. En déduire que l'ordre d'une telle méthode ne peut être supérieur à s.
3. Pour $s = 1, 2$, démontrer qu'il existe des méthodes explicites d'ordre s.

Remarque: Ceci est toujours vrai pour $s = 3, 4$, mais devient faux à partir de $s = 5$: pour $s = 5, 6, 7$, l'ordre maximal est $s - 1$, pour $s = 8, 9$, il est égal à $s - 2$, pour $s \geqslant 10$ il est inférieur à $s - 2$.

Exercice 6. On considère un problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où f est supposée suffisamment régulière (par exemple de classe C^∞). On notera dans la suite h un pas de discrétisation, et $t_n := nT/h$. On considère le schéma défini par

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h).$$

Démontrer que ce schéma est d'ordre p si et seulement si on a, pour tout $k \leqslant p - 1$:

$$\frac{\partial^k}{\partial h^l}\Phi(t, x, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, x),$$

où $f^{[l]}$ est définie par récurrence par $f^{[0]} = f$ et $f^{[l+1]} = \frac{\partial f^{[l]}}{\partial t} + f\frac{\partial f^{[l]}}{\partial x}$.

Indication: Démontrer $x^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, x(t))$ et utiliser la définition de l'erreur de consistance.

Exercice 7. On considère la méthode RK4, dite *méthode de Runge-Kutta "classique" d'ordre* 4, dont le tableau de Butcher est le suivant:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}.$$

1. Montrer que cette méthode est convergente. Ecrire explicitement l'algorithme décrivant cette méthode. Quel intérêt voyez-vous à cette méthode?

2. Pour chacun des 4 niveaux , reconnaître la méthode de quadrature pour les calculs d'intégrales dont est issue le schéma.

3. Déterminer exactement l'ordre de cette méthode. On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 8. 1. Démontrer que la région de stabilité d'une méthode de Runge-Kutta explicite est nécessairement bornée. Un tel schéma peut-il être A-stable?

2. Donner le domaine de stabilité de la méthode décrite à l'Exercice 4. Ce schéma est-il A-stable?

Exercice 9. On s'intéresse au schéma multi-pas dit de Nyström $x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(t_n, x_n)$.

1. Expliquer par un dessin d'où vient ce schéma.

2. Expliciter les α_i, β_i.

3. Quel est son ordre?

4. Est-il stable?

5. Démontrer qu'il n'est pas A-stable.

Exercice 10 (Schémas RK d'ordre 3, examen de juillet 2016)**.** On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, associée à la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, où f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et est suffisamment régulière (par exemple de classe C^∞). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur l'intervalle $[0, T]$, on notera dans la suite $h := T/N$ le pas de discrétisation, et $t_n := nh$. On considère un schéma à un pas défini par

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h),$$

avec Φ supposée très régulière (par exemple de classe C^∞).On définit par récurrence la quantité $f^{[l]}$ ($l \in \mathbb{N}$) par $f^{[0]} = f$ et $f^{[l+1]} = \frac{\partial f^{[l]}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{[l]}}{\partial x}$.

1. Donner explicitement les valeurs de $f^{[1]}, f^{[2]}$ en fonction de f et de ses dérivées successives en t et x, que l'on notera $f_t, f_x, f_{tt}, f_{xx}, f_{tx}$, etc... pour alléger les notations.

2. Démontrer que ce schéma est d'ordre p si et seulement si on a, pour tout $k \leqslant p-1$ et tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^k}{\partial h^k}\Phi(t, x, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, x).$$

   Indication: Démontrer que $x^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, x(t))$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, utiliser la définition de l'erreur de consistance et effectuer un développement limité.

3. Rappeler la définition générale d'un schéma de Runge-Kutta à $s \geqslant 1$ niveaux, avec les notations vues en cours.

   Dans toute la suite, on supposera la condition simplificatrice $c_i = \sum_{1 \leqslant j < i} a_{ij}$ pour tout $i \in [|1, s|]$ vérifiée.

4. A l'aide de la question 2, retrouver le fait qu'un schéma est d'ordre au moins
   - 1 si et seulement si $\sum_{j=1}^s b_j = 1$.
   - 2 si et seulement s'il est d'ordre au moins 1 et $\sum_{j=1}^s b_j c_j = \frac{1}{2}$.

5. Démontrer qu'un schéma est d'ordre au moins 3 si et seulement s'il est d'ordre au moins 2, $\sum_{j=1}^s b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$ et $\sum_{j<i} a_{ij} b_i c_j = \frac{1}{6}$. Indication: on utilisera la question 2 pour un f général, puis on considérera les cas particuliers $f(t, y) = t^2$ et $f(t, y) = t + y$.

6. Vérifier que le schéma RK donné par le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

   est d'ordre 3.

Exercice 11 (Schéma de Milne pour les EDO, examen de mai 2016)**.** On considère un problème de Cauchy scalaire

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où f est supposée définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, de constante de Lipschitz Λ.

On s'intéresse à l'approximation de ce problème sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. On se donne un N destiné à tendre vers $+\infty$ et une grille usuelle de discrétisation à pas constant $t_n = n/N = nh$, avec $h = 1/N$ le pas de discrétisation. On considère le schéma d'approximation numérique suivant, appelé schéma de Milne:

$$x_{n+1} = x_{n-3} + h\left(\frac{8}{3}f(t_n, x_n) - \frac{4}{3}f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{8}{3}f(t_{n-2}, x_{n-2})\right).$$

1. S'agit-t-il d'un schéma explicite, implicite? A un pas, multi-pas? Dans le cas où le schéma serait multi-pas, quel est le nombre de pas r?

2. Donner les α_i et β_i tels que le schéma puisse s'écrire sous la forme $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_{n-i} + h \sum_{i=0}^{r} \beta_i f(t_{n-i}, x_{n-i})$.

3. Trouver l'ordre exact du schéma.

4. Ce schéma est-t-il stable? Est-il convergent?