TD 2: équations aux dérivées partielles (EDP)

Exercice 1. On s'intéresse à l'équation de la chaleur définie sur $\mathbb{R}^d$ tout entier

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, \\ u(0,x) &= u^0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,L]). \end{aligned} \tag{1}$$

Démontrer les propriétés suivantes:

1. Il existe au moins une solution à ce problème donnée par
$$u(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} u^0(x-y)dy$$
pour $t > 0$.
2. $u \in C^0([0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$ et $u \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$.
3. $\forall t > 0$, $u(t,.) \in L^2(0,L)$ et
$$\|u(t,.)\|_2 \leqslant \|u^0\|_2.$$
4. La solution est unique.
5. Si $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors, $\forall t > 0$, $u(t,.) \in L^\infty(0,L)$ et
$$\|u(t,.)\|_\infty \leqslant \|u^0\|_\infty.$$
6. Si $u^0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors, $\forall t > 0$, $u(t,.) \in L^\infty(0,L)$ et il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$,
$$\|u(t,.)\|_\infty \leqslant \frac{C}{t^{d/2}}.$$
7. Si $u^0 \neq 0$ et $u^0 \geqslant 0$ presque partout, alors $\forall t > 0,\ \forall x > 0,\ u(t,x) > 0$.

Dans les exercices 2 à 5 qui suivent, on s'intéresse à l'approximation de l'équation de la chaleur sur $(0,T) \times (0,1)$ avec condition de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \\ \quad u(0,x) = u^0(x) \in C^\infty([0,1]), \\ \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

la condition initiale vérifiant $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Soit J, N des entiers > 0. On pose

$$t_n := \frac{Tn}{N} \text{ et } x_j := \frac{j}{J}, \text{ ainsi que les pas de temps et d'espace } h := \frac{T}{N} \text{ et } k := \frac{1}{J}.$$

On pose u_j^n une approximation de $u(t^n, x_j)$. La condition initiale est supposée être approchée de manière exacte par $u_j^0 := u^0(x_j)$. On aura toujours les conditions au bord $u_0^n = u_J^n = 0$ pour $n \in [0,N]$. On pose U_n le vecteur

$$\begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \dots \\ u_J^n. \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On s'intéresse au schéma numérique donné par la relation

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{k^2} = 0.$$

1. Le schéma est-il implicite ou explicite? En mettant ce schéma sous forme matricielle, démontrer qu'il est bien défini.

2. Démontrer que ce schéma est consistant, et d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

3. Calculer explicitement la TFTD de ce schéma. Le schéma est-il stable en norme l^2? Convergent?

Exercice 3. On s'intéresse au schéma numérique donné par la relation

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{h} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{k^2} = 0.$$

Ce schéma est appelé *schéma saute-mouton.*

1. Le schéma est-il implicite ou explicite? Donner une matrice B telle que le schéma puisse s'écrire sous forme matricielle $V^{n+1} = BV_n$, où V est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer que le schéma saute-mouton est consistant et d'ordre 2 en temps et en espace.

3. Calculer explicitement la TFTD de ce schéma.

4. Le schéma saute-mouton est-il stable en norme l^2? Convergent?

Exercice 4. On considère le schéma explicite vu en cours, donné par la relation

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{k^2} = 0.$$

Dans l'étude de la consistance, stabilité et convergence de ce schéma, on remplace la norme l^2 par la norme l^∞ définie par

$$\|U_n\|_\infty := \max_{j \in [|0,J|]} |u_j^n|.$$

1. Démontrer que le schéma est consistant en norme l^∞ d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

2. Démontrer par un calcul direct (sans passer par la TFTD) que le schéma est stable en norme l^∞ si la condition CFL est vérifiée.

3. Démontrer que le schéma est convergent en norme l^∞. Ce résultat vous paraît-il meilleur ou non que la convergence en norme l^2?

Exercice 5. Résoudre l'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) + tx\partial_x u(t,x) = 0,$$

avec condition initiale $u(0,x) = u^0(x)$ de classe C^1. A x fixé, quelle est la limite de $u(t,x)$ quand $t \to \infty$?

Exercice 6 (équation de transport avec condition au bord)**.** On s'intéresse à la résolution du problème suivant, posé sur une demi-droite en espace,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

où a est une constante et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+)$.

1. On suppose que $a < 0$. Montrer que le problème admet une unique solution.

   On suppose maintenant que $a > 0$.

2. Montrer que le problème est mal posé.

3. On ajoute la condition au bord
$$u(t,0) = g(t),\ t > 0,$$
où $g \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que le problème admet une solution de classe C^1, que l'on déterminera, si et seulement si
$$g(0) = u_0(0) \text{ et } g'(0) + a\, u_0'(0) = 0.$$

Exercice 7. Pour l'équation de transport à coefficients constants, étudier la consistance et la stabilité du schéma suivant, appelé schéma explicite centré en espace:
$$\frac{1}{h}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{c}{2k}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0.$$

Exercice 8 (étude du schéma de Lax–Wendroff pour la résolution de l'équation de transport)**.** Soit une solution régulière u de l'équation de transport
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que
$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) - ah\,\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{a^2 h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(h^3),\ n \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

   Pour la résolution numérique de l'équation, on propose la famille de schémas, indexée par le paramètre μ,
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} + a\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,k} - \mu\frac{h}{k^2}\,\left(u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n\right) = 0,\ n \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

2. Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante à l'ordre deux au moins en temps et en espace. Le schéma ainsi obtenu est le appelé le schéma de Lax–Wendroff.

3. Donner une condition suffisante qui assure la stabilité du schéma, et conclure.

4. On considère une condition initiale de la forme $u_0(x) = e^{ikx}$. Calculer la solution exacte de l'équation de transport associée puis la solution approchée par le schéma de Lax-Wendroff. Qu'observe-ton?

   Ce phénomène est appelé *dispersion numérique.*

Exercice 9 (Un schéma pour l'équation de la chaleur, examen de juin 2016)**.** On s'intéresse à l'approximation de l'équation de la chaleur sur $(0,T) \times (0,1)$ avec condition de Dirichlet homogène
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \\ u(0,x) = u^0(x) \in C^\infty([0,1]), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases}$$
la condition initiale vérifiant $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Soit J, N des entiers > 0. On pose $t_n := Tn/N$ et $x_j := j/J$, ainsi que les pas respectivement de temps et d'espace $h := T/N$ et $k := 1/J$. On pose u_j^n une approximation de $u(t_n, x_j)$. La condition initiale est supposée être approchée de manière exacte par $u_j^0 := u^0(x_j)$. On a les conditions au bord $u_0^n = u_J^n = 0$ pour $n \in [|0, N|]$. On s'intéressera au schéma donné par la relation suivante:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^n}{k^2} = 0.$$

1. Démontrer que ce schéma est explicite en temps, contrairement aux apparences.

2. Effectuer l'analyse de stabilité au sens de Von Neumann. Ce schéma est-il inconditionnellement stable?

3. Sous quelle condition sur h et k ce schéma est-il convergent? Trouvez-vous ce schéma plus intéressant que le schéma aux différences finies explicites? Que le schéma de Cranck-Nicolson?

Exercice 10 (Schéma implicite centré pour l'équation de transport, examen de mai 2016)**.** Soit $a \neq 0$ une vitesse constante. On s'intéresse à l'approximation de l'équation de transport sur $(0,T) \times (0,1)$ avec condition **périodiques**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0,x) = u^0(x), \\ u(t,0) = u(t,1), \end{cases}$$

la condition initiale vérifiant $u^0(x) \in C^\infty([0,1])$ et $u^0(0) = u^0(1)$. Soient J, N des entiers $\geqslant 2$. On pose

$$t_n := \frac{Tn}{N} \text{ et } x_j := \frac{j}{J}, \text{ ainsi que les pas de temps et d'espace } h := \frac{T}{N} \text{ et } k := \frac{1}{J}.$$

On pose u_j^n une approximation de $u(t_n, x_j)$. La condition initiale est supposée être approchée de manière exacte par $u_j^0 := u^0(x_j)$. On aura toujours les conditions au bord périodiques $u_0^n = u_J^n$ pour $n \in [|0,N|]$. Pour $n \in [|0,N|]$, On pose U_n le vecteur (de $\mathbb{R}^{J+1}$)

$$U_n := \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \dots \\ u_J^n \end{pmatrix}.$$

On s'intéressera au schéma suivant, appelé schéma implicite centré:

$$\frac{1}{h}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2k}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0.$$

On admettra qu'un schéma est stable **si et seulement si** son coefficient d'amplification est de module $\leqslant 1$.

Le problème est constitué de deux parties indépendantes, en dehors du fait que la dernière question de la première partie est utilisée dans la deuxième question de la deuxième partie.

Partie I: un résultat sur les matrices antisymétriques

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ une matrice réelle. A est dite *antisymétrique* si $A^* = -A$, où A^* est l'adjoint (autrement dit la transposée ici) de A. On rappelle que $\mathbb{C}^m$ est muni d'un produit hermitien défini de la manière suivante: si $u, v \in \mathbb{C}^m$, de composantes dans la base canonique respectivement u_i et v_i ($i \in [|1,m|]$), alors

$$< u, v > := \sum_{i=1}^m u_i \overline{v_i},$$

où $\overline{z}$ désignera dans toute la suite le conjugué d'un nombre complexe z. On rappelle la propriété suivante: $< v, u > = \overline{< u, v >}$. Dans les questions 1 et 2, on considère $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, quelconque (pas forcément antisymétrique).

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}^m$. Démontrer que $< Au, v > = < u, A^*v >$. On pourra faire intervenir les coefficients de A.
2. Soit x un vecteur propre (éventuellement complexe) de A associé à la valeur propre (éventuellement complexe) λ de A. Calculer $< Ax, x >$.
3. En déduire que toute matrice antisymétrique a ses valeurs propres (complexes) imaginaires pures.

Partie II: étude du schéma

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite? Quelle difficulté cela soulève-t-il d'un point de vue pratique lors de l'implémentation?
2. Réécrire ce schéma de manière matricielle sous la forme matricielle $AU_{n+1} = U_n$ (où $A \in \mathcal{M}_{J+1}(\mathbb{R})$), puis justifier que la matrice A est inversible. On utilisera la dernière question de la partie I et on s'inspirera de la démonstration vue en cours pour le schéma de Cranck-Nicolson.
3. Démontrer que le schéma est d'ordre (au moins) 1 en temps et 2 en espace.
4. Effectuer l'étude de stabilité de Von Neumann. Que dire de la convergence de ce schéma?

Exercice 11 (Stabilité l^∞ du schéma explicite décentré à gauche pour l'équation de transport, examen de juillet 2016). Soit $a > 0$ une vitesse constante. On s'intéresse à l'approximation de l'équation de transport sur $(0, T) \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0,x) = u^0(x), \end{cases} \tag{3}$$

la condition initiale vérifiant $u^0(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit N un entier $\geqslant 2$. On considère un pas de temps $h := \frac{T}{N}$ et $k > 0$ un pas d'espace. On pose, pour $n \in [|0, N|]$ et $j \in \mathbb{Z}$, $t_n := \frac{Tn}{N}$ et $x_j := jk$. On pose u_j^n une approximation de $u(t_n, x_j)$. La condition initiale est supposée être approchée de manière exacte par $u_j^0 := u^0(x_j)$, pour $j \in \mathbb{Z}$.

On s'intéressera au schéma suivant:

$$\frac{1}{h}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{k}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0.$$

On suppose dorénavant que h et k sont liés par la relation $h = \lambda k$, avec $\lambda > 0$ fixé.

1. Rappeler l'ordre de ce schéma.
2. Réécrire le schéma en ne faisant intervenir que λ et a.
3. Trouver une condition sur λ et a pour que le schéma vérifie

   $$\min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leqslant u_j^{n+1} \leqslant \max(u_j^n, u_{j-1}^n),$$

   pour tout $n \in [|0, N-1|]$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

   En déduire que pour tout $n \in [|0, N|]$,

   $$\min_{i\in\mathbb{Z}} u_i^0 \leqslant u_j^n \leqslant \max_{i\in\mathbb{Z}} u_i^0.$$

   Quel nom peut-on donner à la condition sur λ et a? On supposera dorénavant cette condition vérifiée.
4. A l'aide de la question précédente, démontrer la convergence du schéma en norme l^∞. On rappelle qu'à n fixé, la norme infinie de $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ est donnée par

   $$||(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}||_\infty := \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n|.$$

   Indication: on pourra revenir à la définition de l'erreur de convergence et l'exprimer grâce à l'erreur de consistance.